

## 三阶非线性效应-III

吴赛骏\*

复旦大学物理系, 上海 200433, 中国。

本文档随教学进程跟新。

### A. 回顾：互相位调制和二波混频

上节课我们提到，由  $n = n_0 + n_2 I$  描述的光强相关折射现象，或者叫 Kerr 效应，是一系列三阶非线性光学耦合过程的物理基础。按照参与光场的模式数，分为自相位调制 (SPM)，互相位调制 (XPM)，椭圆偏自旋转 (SR)，以及包括光学相位共轭在内的“四波混频”。我们讨论了“简并二波混频”，发现因为光强相关折射率变化， $\mathbf{E}_2$  的存在以两种方式影响  $\mathbf{E}_1$  的传播，由式(1)右边第一、第二项给出（注意  $n_2 I \rightarrow n_2 |\tilde{\mathbf{E}}|^2$  重新定义）：

$$i\partial_z \tilde{\mathbf{E}}_1 = -n_2 \frac{\omega}{c} \left( (\tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_2^*) \tilde{\mathbf{E}}_2 + (\tilde{\mathbf{E}}_2 \tilde{\mathbf{E}}_2^*) \tilde{\mathbf{E}}_1 + (\tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_1^*) \tilde{\mathbf{E}}_1 \right) \quad (1)$$

第二项的写法，很明显的就是 XPM。而第一项也可以理解为“四波混频”项， $\tilde{\mathbf{E}}_1$  和  $\tilde{\mathbf{E}}_2$  干涉，驱动形成折射率干涉条纹，其中  $n_2 (\tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_2^*) e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}}$  分量刚好和  $\tilde{\mathbf{E}}_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}$  满足 Bragg 条件，形成向  $\mathbf{k}_1$  方向的相干散射。

然而无论怎么理解，第一项的计算结果，和第二项是完全一样的，由于  $|\tilde{\mathbf{E}}_2|^2$  是实数，这两项的存在均导致  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  传播相位的改变。并不会改变  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  的能量。也即我们上节课说的，频率相同的两束光在 Kerr 介质中不存在能量交换。

### B. 拉曼耦合

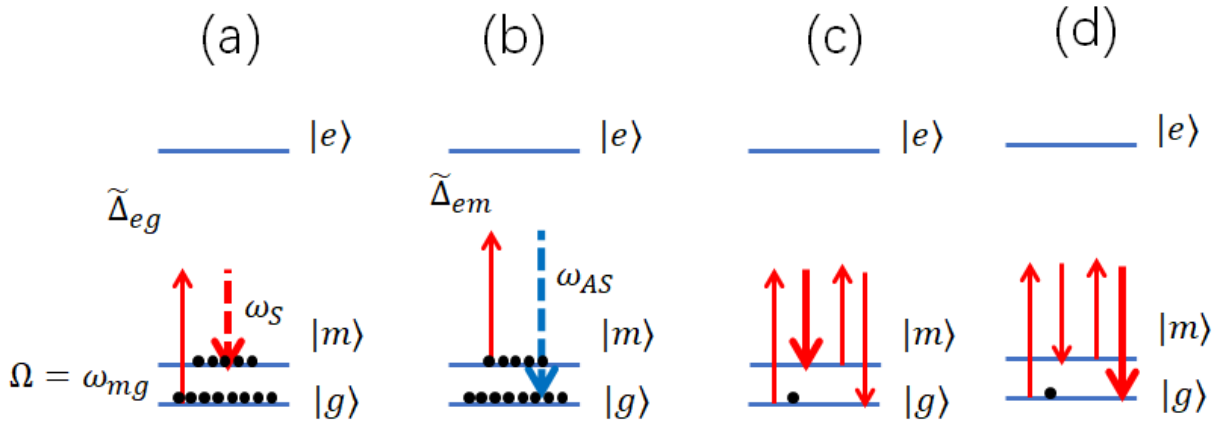


图 1. Diagrams for (a): Spontaneous Raman-Stokes scattering. (a): Spontaneous Raman-Anti-Stokes scattering. (c): Stimulated Raman scattering: the Stokes  $\chi_R^{(3)}(\omega_S; \omega, -\omega, \omega_S)$ ; (d): Stimulated Raman scattering: the Anti-Stokes  $\chi_R^{(3)}(\omega_{AS}; \omega, -\omega, \omega_{AS})$

如果现在我们考察  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  的频率不同， $\omega_2 - \omega_1 = \delta$  和物质的某个亚稳态激发频率  $\omega_{mg}$  共振，那么上式在“四波混频区”需要添加一项：

$$i\partial_z \tilde{\mathbf{E}}_1 = -\frac{\omega}{c} \left( (n_2 + \chi_R^{(3)}) (\tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_2^*) \tilde{\mathbf{E}}_2 + n_2 (\tilde{\mathbf{E}}_2 \tilde{\mathbf{E}}_2^*) \tilde{\mathbf{E}}_1 + n_2 (\tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_1^*) \tilde{\mathbf{E}}_1 \right) \quad (2)$$

\* saijunwu@fudan.edu.cn

还可以分两种情况：如果  $\delta \approx \omega_{mg}$ ，即  $\omega_1$  的频率较小，那么我们令  $\omega_1 = \omega_S$ ， $\omega_2 = \omega$ ，拉曼增强的三阶非线性系数由图(1)c 给出（注意我们推广到了多激发态情形）：

$$\chi_R^{(3)}(\omega_S; \omega, -\omega, \omega_S) = \rho_g \sum_{e, e'} \frac{\mathbf{d}_{ge} \mathbf{d}_{em} \mathbf{d}_{me'} \mathbf{d}_{e'g}}{4\hbar^3 \tilde{\Delta}_{eg} \tilde{\Delta}_{mg}^* \tilde{\Delta}_{e'g}^*} \quad (3)$$

如果  $-\delta \approx \omega_{mg}$ ，即  $\omega_1$  的频率较大，那么我们令  $\omega_1 = \omega_{AS}$ ， $\omega_2 = \omega$ ，拉曼增强的三阶非线性系数由图(1)d 给出

$$\chi_R^{(3)}(\omega_{AS}; \omega, -\omega, \omega_{AS}) = \rho_g \sum_{e, e'} \frac{\mathbf{d}_{ge} \mathbf{d}_{em} \mathbf{d}_{me'} \mathbf{d}_{e'g}}{4\hbar^3 \tilde{\Delta}_{eg} \tilde{\Delta}_{mg} \tilde{\Delta}_{e'g}} \quad (4)$$

显而易见的是，无论  $\chi_R^{(3)}$  取式(3)(4)哪种形式，均不能保证  $\chi_R^{(3)} |\tilde{\mathbf{E}}_2|^2$  是实数。接下来我们会发现， $\chi_R^{(3)} |\tilde{\mathbf{E}}_2|^2$  的虚部对于式(3)的情况为负，存在增益，对于式(4)的情况为正，是损耗。我们将两种情况分别成为 Stokes 光的拉曼增益，以及反 Stokes 光的拉曼衰减。

### C. 自发拉曼散射的微扰计算

#### I. 拉曼效应

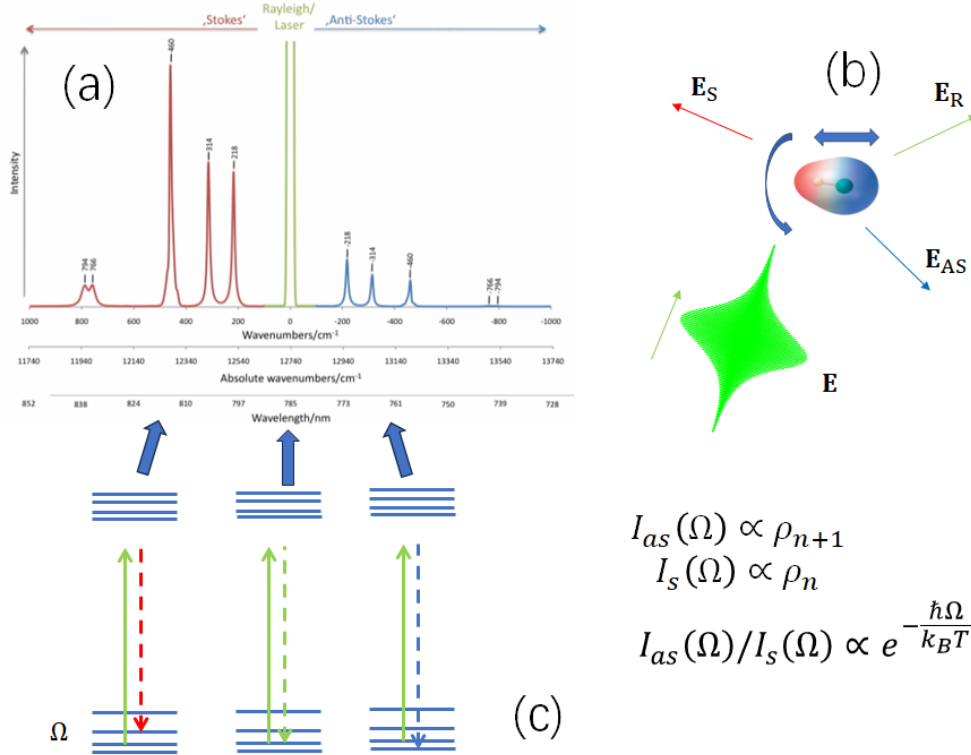


图 2. Spontaneous Raman scattering (a): Typical spectrum of SRS (from online) (b): Illustration of Stokes (red), antiStokes (blue) and Rayleigh scattering during SRS. (c): Level diagrams for Raman-Stokes, Rayleigh and Raman-anti-Stokes scatterings.

历史上，拉曼散射是印度科学家拉曼（Chandrasekhara Venkata Raman, 1930 Nobel Prize in

Physics) 发现的。如图(2)所示，如果我们收集分子对入射光的随机散射，并分析其频谱，会发现除了弹性散射 (瑞丽散射, Rayleigh scattering) 峰以外，还存在一些红移和蓝移的边带。

### 1. Stokes 和反 Stokes 边带

拉曼发现，这些边带和瑞丽峰的频率差对应于分子的转动和振动能级  $\Omega$ 。其中红移边带叫 Stokes 边带，蓝移边带叫反 Stokes 边带。相对于频率不变的弹性散射 – Rayleigh 峰，Stokes 和 anti-Stokes 都非常弱，且 Stokes 常常比反 Stokes 强一些。

### 2. 微扰计算

如图(2)所示，对于室温下的分子，其转振能级的布局常常满足 Boltzman 分布

$$\rho_m = \frac{\rho_0}{Z} e^{-\hbar\Omega_m/k_B T} \quad (5)$$

其中  $\rho_0$  是分子气体的空间密度。 $Z$  是配分函数，而  $\Omega_m$  是转振能级  $|m\rangle$  相对于基态的能量差  $\Omega_m = \omega_{mg}$ 。

我们考察如图(1)a 的自发散射过程。分子从基态出发，在频率为  $\omega$  的激发光  $\mathbf{E}$  作用下，激发态  $|e\rangle$  的布局数很容易以 L34 的微扰法算出

$$c_e = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_{eg}}{2\hbar\tilde{\Delta}_{eg}} + \dots$$

以下为描述简洁起见，我们假设光场和分子的光学跃迁近共振，忽略反旋转波成分，获得 Rayleigh 散射及 Stokes 散射强度

$$\begin{aligned} \gamma_{g,S} &= \rho_g \sum_e |c_e|^2 \Gamma_{e-m}, \\ &= \rho_g \sum_e \frac{|\mathbf{d}_{eg}|^2}{4\hbar^2 |\tilde{\Delta}_{eg}|^2} |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \Gamma_{e-m}, \\ \gamma_{g,\text{Rayleigh}} &= \rho_g \sum_e |c_e|^2 \Gamma_{e-g}, \\ &= \rho_g \sum_e \frac{|\mathbf{d}_{eg}|^2}{4\hbar^2 |\tilde{\Delta}_{eg}|^2} |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \Gamma_{e-g}. \end{aligned} \quad (6)$$

基于热平衡，我们还需要考虑分子初态处于  $|m\rangle$  态的情形，类似于式(6)，我们有

$$\begin{aligned} \gamma_{m,AS} &= \rho_m \sum_e \frac{|\mathbf{d}_{em}|^2}{4\hbar^2 |\tilde{\Delta}_{em}|^2} |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \Gamma_{e-g}, \\ \gamma_{m,\text{Rayleigh}} &= \rho_m \sum_e \frac{|\mathbf{d}_{em}|^2}{4\hbar^2 |\tilde{\Delta}_{em}|^2} |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \Gamma_{e-m}. \end{aligned} \quad (7)$$

在式(6)(7) 中我们引入了  $\Gamma_{e-g}$ ,  $\Gamma_{e-m}$  分别为  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ ,  $|e\rangle \rightarrow |m\rangle$  的自发辐射率。同学们只需要记住费米黄金规则: 从  $|b\rangle$  态自发辐射到  $|a\rangle$  态，发出频率为  $\omega$  光子的散射率是正比于跃迁矩阵元  $|\mathbf{d}_{ab}|^2$  以及频率  $\omega$  光子的态密度  $\rho_{\text{photon}}(\omega)$ ,

$$\Gamma_{a-b} \propto |\mathbf{d}_{ab}|^2 \omega \rho(\omega) \quad (8)$$

对于式(6)(7)来说，如果  $\omega, \omega_S, \omega_{AS}$  频率差别不太大，光子态密度  $\rho_{\text{photon}} \propto \omega^2$  类似，我们容易发现

$$\frac{\gamma_{g,S}}{\gamma_{m,AS}} \approx \frac{\rho_g}{\rho_m} \quad (9)$$

因此，通过分析 Stokes，反 Stokes 散射强度比例，可以推知亚稳态分子布局，进而推知环境温度。

### 3. 简介：分子振动的激光冷却

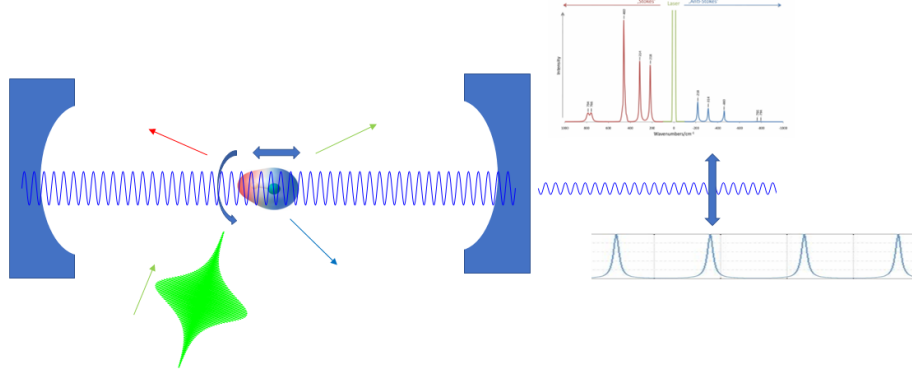


图 3. Schematic of Cavity-cooling of ro-vibrational levels of molecules. The cavity-resonance is tuned to anti-Stokes sideband of Raman transition. The anti-Stokes scattering is accompanied by reduction of rovibrational quantum number, thereby cool the molecule.

从图(1)(a,b) 可知, Stokes 散射对应分子内态的能量上升, 反 Stokes 对应能量下降。而由式(9), 由于低能量态布局数大, Stokes 成分常常主导。分子不断地被拉曼散射后, 亚稳态布局趋于“均分”, 熵最大, 温度达到无穷, 等等。

是否可以控制散射过程, 抑制 Stokes 散射, 增强反 Stokes 散射, 让图(1)(b) 过程降低分子内能, 直到基态呢? 仔细看式(3)(3), 这个想法可以通过修改光子态密度  $\rho_{\text{photon}}(\omega_S)$ ,  $\rho_{\text{photon}}(\omega_{AS})$  来实现。见图(3)。和图(3)冷却相关的统计力学思考(熵增), 由前苏联科学家朗道于上个世纪 50 年代给出。

#### A. 稳态拉曼增益

见式(3), 我们可以定义拉曼共振下 Stokes 光折射率改变:

$$\begin{aligned} \delta n_R(\omega_S) &= \chi_R^{(3)}(\omega_S; \omega, -\omega, \omega_S) |\tilde{\mathbf{E}}|^2, \\ &= \rho_g \sum_{e, e'} \frac{\mathbf{d}_{ge} \mathbf{d}_{em} \mathbf{d}_{me'} \mathbf{d}_{e'g}}{4\hbar^3 \tilde{\Delta}_{eg} \tilde{\Delta}_{e'g}^*} |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \frac{(\delta - \omega_{mg}) - i\Gamma_{mg}/2}{(\delta - \omega_{mg})^2 + \Gamma_{mg}^2/4}, \\ &= \rho_g |M_{gm} \mathbf{E}|^2 \frac{(\delta - \omega_{mg}) - i\Gamma_{mg}/2}{(\delta - \omega_{mg})^2 + \Gamma_{mg}^2/4}, \\ &= n'_R + i n''_R \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $M_{gm} = \sum_e \frac{\mathbf{d}_{ge} \mathbf{d}_{em}}{2\hbar \tilde{\Delta}_{eg}}$  是 L7 中介绍的拉曼张量。

式(10)最后一行  $n'_R$  是  $\delta n_R$  的实部，贡献于 Stokes 光的折射。 $n''_R$  是  $\delta n_R$  的虚部，贡献于 Stokes 光的吸收或者增益。显然的是，用于维持  $\rho_g$  稳定的  $\Gamma_{mg} > 0$  是正数，那么我们有  $G = -n''_R > 0$ ，是为拉曼增益系数。

### B. 受激拉曼散射和拉曼光学放大

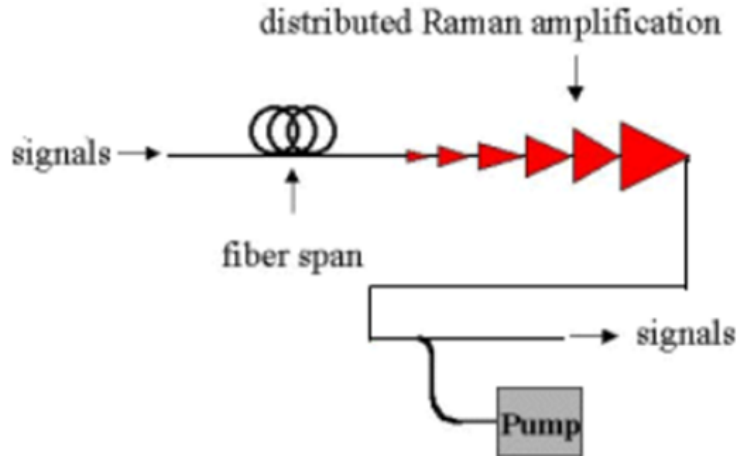


图 4. Fiber-based Raman amplifier (from online)

由上述讨论可知，图(1)a 的自发拉曼 Stokes 散射，和图(1)c 受激拉曼 Stokes 放大，存在内禀联系。和 L56 关于 OPA 的讨论类似，图(1)a 自发拉曼散射的存在，保证了图(1)c 的拉曼放大存在自发散射噪声，是量子力学的要求。

和 L56 基于二阶过程的 OPA 不同，式(2)对于拉曼过程的应用中，拉曼增益直接体现为式(10)折射率变化，自动满足波矢匹配。因此，拉曼放大器非常好用，如图(4)所示，可以用来在光纤中从相反的方向泵浦，放大光纤内脉冲信号。

### C. 受激拉曼散射的自发形成?

从图(1)a 的自发拉曼 Stokes 散射到图(1)c 的受激拉曼 Stokes 放大，很容易自发产生。介质中随机产生的 Stokes 荧光会在传播过程中被不断放大，只要介质沿着该随机产生荧光的  $\mathbf{k}_S$  方向足够长，那么被放大的 Stokes 荧光就开始驱动图(1)c 的受激拉曼散射。自发和受激过程的关系和激光过程中的自发辐射/受激辐射的关系是相同的。

#### 1. 拉曼激光

回顾一下上一讲：存在增益后，只要有模式竞争，不同模式的增益，损耗不同，那么净增益大的模式会胜出，产生单频激光。例如，不同模式间净增益的区别可以是和泵浦光  $\mathbf{E}$  的光迹重合程度不同导致。如果是均匀照明，也可能是沿着样品长轴方向的模式胜出，等等。当然，加外腔反馈可以用来改变模式的净增益。

## 2. 回顾：混合参量过程

当然，上述式(10)的推导，是基于  $\tilde{\Delta}_{mg}$  特别是弛豫系数  $\Gamma_{mg}$  充分大，分子体系“自旋波”激发  $S_m = \rho_g c_m e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\tilde{\omega}_{mg}t}$  可以达到稳态。如果这个假设不成立，那么我们需要直接考虑光场和拉曼自旋波的耦合，回顾 L7 关于光场和自旋波包络面的 Maxwell-Bloch 方程：

$$\begin{aligned} i\dot{\tilde{S}}_m &= \rho \frac{1}{\hbar} M_{mg} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_S^* \tilde{\mathbf{E}} e^{-i\tilde{\Delta}_{mg}t}, \\ i\partial_z \tilde{\mathbf{E}}_S &= \frac{3}{4} \frac{\omega_S^2}{\varepsilon_0 k_S c^2} M_{mg} S_m^* \tilde{\mathbf{E}}, \\ i\partial_z \tilde{\mathbf{E}} &= \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\varepsilon_0 k c^2} M_{gm} S_m \tilde{\mathbf{E}}_S \end{aligned} \quad (11)$$

## D. 伴随增益的超光速脉冲传播

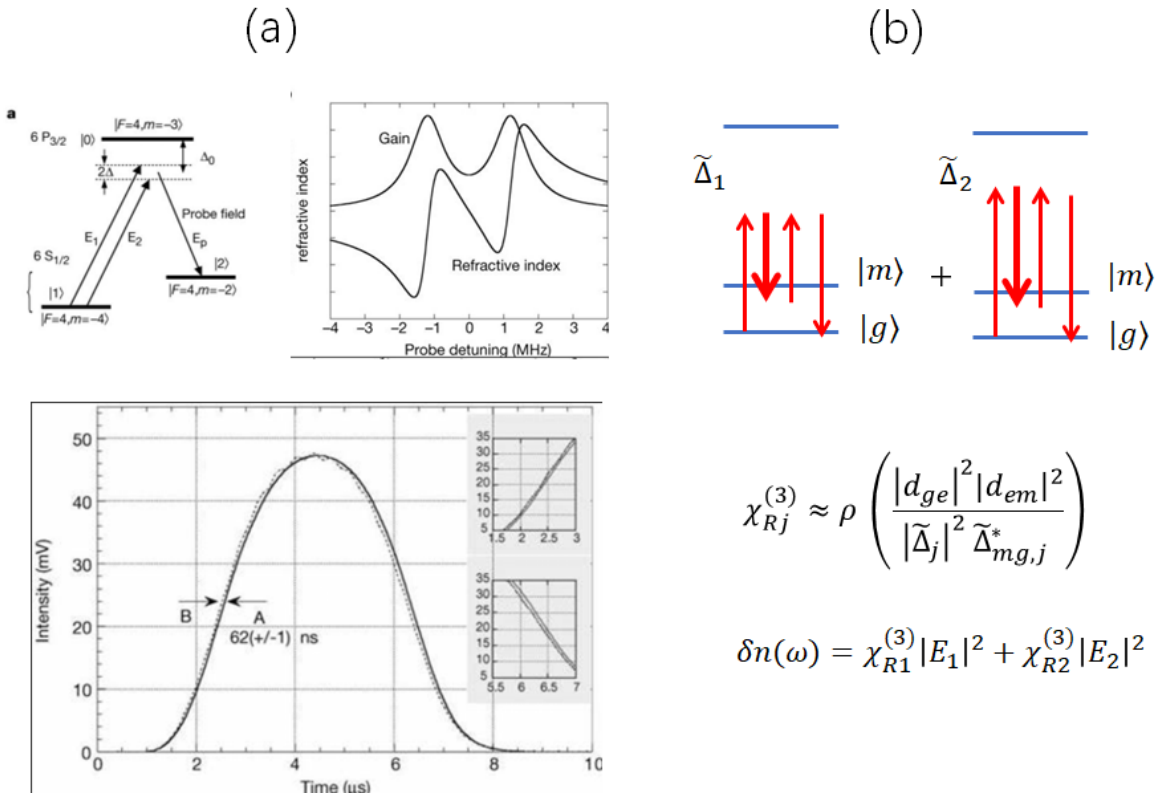


图 5. Gain-assisted superluminal light propagation (a): setup, dispersion, and results (from Nature 406, 277 (2000)) (b): evaluation of  $\delta n$ .

我们继续考察式(10)，由 Kramer-Kronig 关系，和双光子共振频率  $\delta - \omega_{mg}$  相关的拉曼增益  $n''(\omega_S)$  必然导致强烈的色散  $n'(\omega_S)$ 。色散为正值， $\frac{d}{d\omega} n'(\omega) > 0$ 。注意线性色散导致脉冲光的群速度变化：

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \quad (12)$$

因此，被拉曼共振放大的脉冲光，群速度小于光速。

显而易见的是，脉冲光在普通吸收介质中的行为，和被拉曼放大的脉冲刚好是反的：存在吸收，存在反常色散， $\frac{dn'}{d\omega} < 0$ ，可导致脉冲传播的群速度  $v_g > c$  超光速，甚至呈现负值（光还没进入介质就跑出来了）。针对这个看似违背因果律的现象的通常解释是该“超光速”仅为强烈吸收下的波形扭曲而已。

和这一解释形成鲜明对比，2000 年工作于 NEC 的王力军老师（现工作于清华大学）运用双拉曼增益实现了伴随增益的超光速脉冲传播。见图(5)并参考式(10)。

为何这个实验没有违背因果律？感兴趣的同学可以查阅 Jackson 电动力学的“光先驱波” (optical precursor)

### E. 拉曼电磁感应透明和慢光

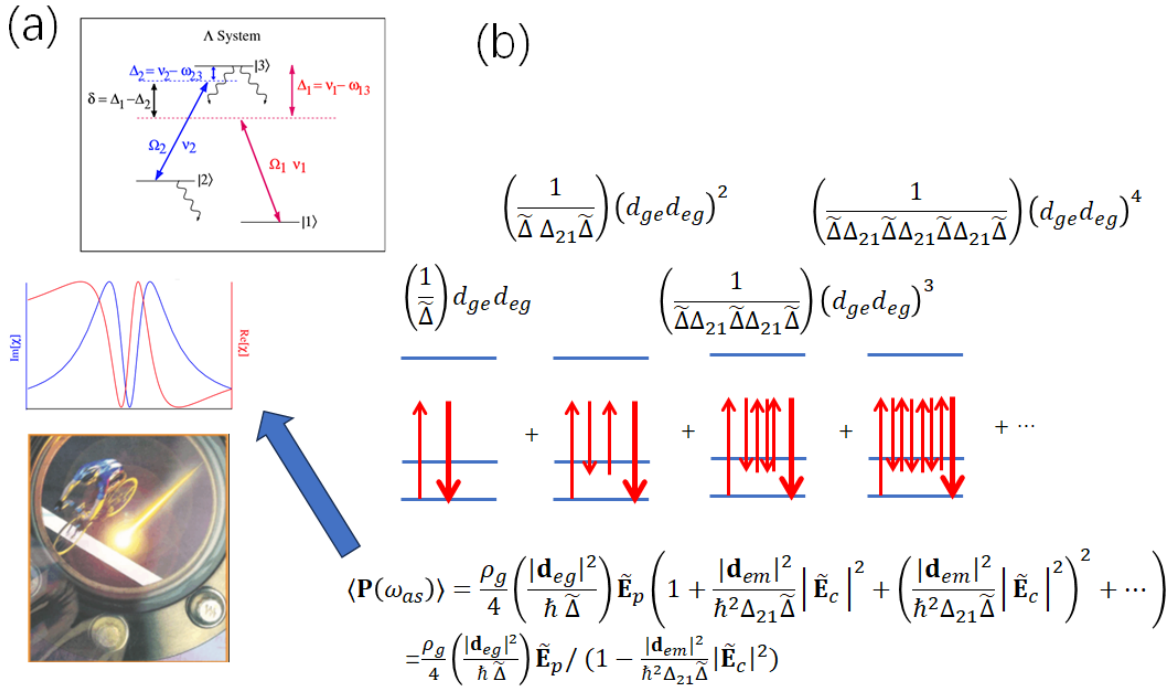


图 6. (a): Slow light and EIT (from Nature 397, 594(1999)). (b): Perturbative evaluation of  $n$ .

从式(7), 类似于式(10)的推导会发现反 Stokes 光会被吸收,  $n''(\omega_{AS}) > 0$ . 这个观测也非常合理: 我们考察图(1)d. 反 Stokes 光直接看到基态的大量原子, 自然会有吸收。而三阶过程让这个吸收变得更加厉害。然而有趣的是, 如果我们继续考虑更高阶的“拉曼过程”, 如图(6)所示, 把所有贡献加起来, 会得到:

$$\chi(\omega_{AS}) = \frac{\chi^{(1)}}{1 - \frac{|\mathbf{d}_{em}|^2 |\mathbf{E}_c|^2}{\hbar^2 \tilde{\Delta}_{12} \tilde{\Delta}}} \quad (13)$$

这里我们重新命名  $\mathbf{E}_c = \mathbf{E}$  为“控制光”。当  $\delta = \omega_{mg}$  双光子共振, 且  $\Gamma_{mg} = 0$ , 完全没有基态弛豫时,  $\chi^{(1)}(\omega_{AS}) \rightarrow 0$ . 这个看似非常古怪的现象叫电磁感应透明, 在  $\Delta_{eg} = 0$ , 单光子共振时也是成立的。



此外，如图(6)a 中部所示，在透明窗口附近，折射率（正常色散）变化剧烈， $v_g \ll c$  可以非常小。通过减小控制光  $|\mathbf{E}_c|^2$  强度，减小透明窗口的宽度，可以增大色散，降低脉冲群速度到零，实现光场激发向拉曼自旋波激发的相干转移。

## F. 相干反 Stokes 拉曼散射

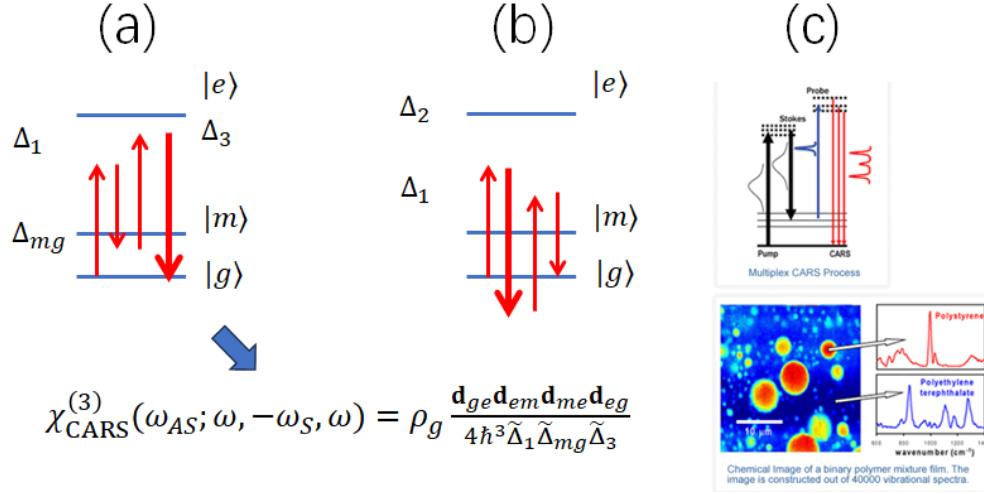


图 7. (a): Diagram for CARS. (b): An off-resonant diagram. (c): CARS-imaging (from online)

在拉曼放大过程中，随着  $\omega, \omega_S$  的放大，会出现如图(7)a 的相干反 Stokes 散射过程。

### 1. CARS 成像

主动注入  $\omega, \omega_S$  光，收集  $\omega_{AS}$  光成像，其信噪比可远大于自发拉曼散射，且有光谱学、物性解析成像等各类便利和优势。见图(7)。

## G. 简介：基于拉曼增强四波混频的简并参量下转换

见图(8)。和基于二阶过程的 SPDC 对比，气体中的 Stokes-反 Stokes 对产生的频率带宽更窄，有利于很多原子物理和量子光学应用。

## II. 布里渊散射

在 L7 中已经提到，如式(11)中的拉曼自旋波，可以是晶体声波。此时高效拉曼激发需要满足相位匹配关系，对应于图(9)b

$$\begin{aligned} \omega - \omega_S &= \omega_A, \\ \mathbf{k} - \mathbf{k}_S &= \mathbf{k}_A \end{aligned} \tag{14}$$

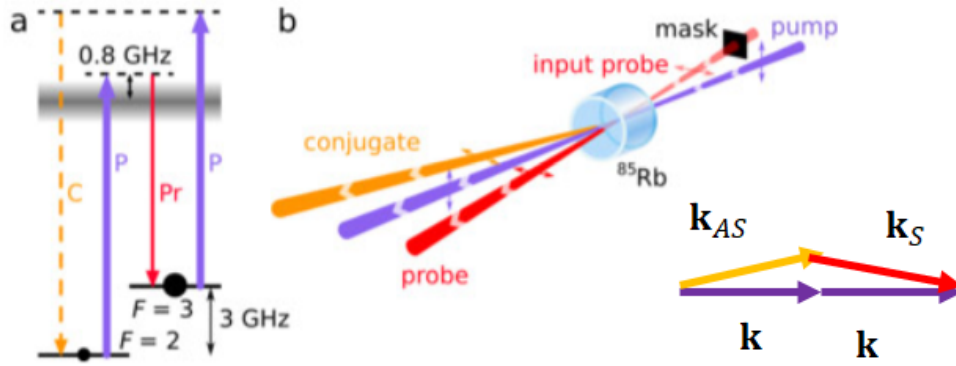


图 8. Spontaneous Stokes-AntiStokes pair generation in 4-wave mixing (Nature 457, 859 (2009))

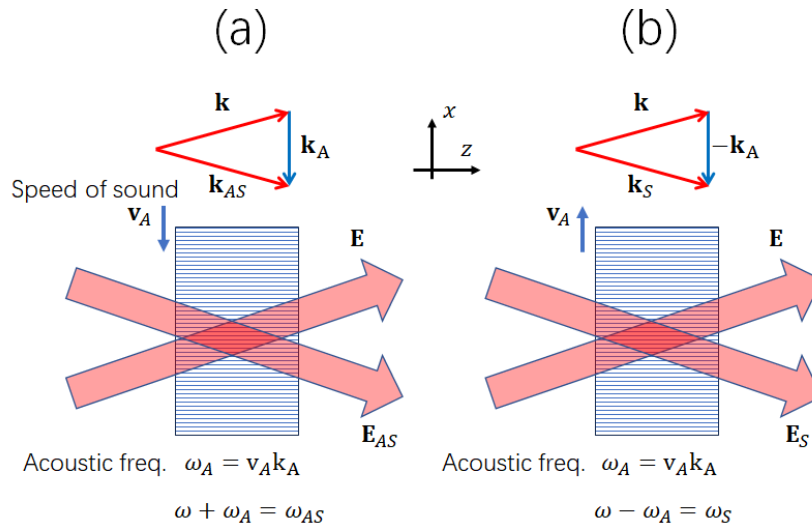


图 9. (a): Anti-Stokes process in Brillouin scattering. (b): Stokes process in Brillouin scattering.

对应于图(9)a

$$\begin{aligned}\omega_{AS} - \omega &= \omega_A, \\ \mathbf{k}_{AS} - \mathbf{k} &= \mathbf{k}_A\end{aligned}\tag{15}$$

其中声波波矢  $\mathbf{k}_A$  和频率  $\omega_A$  满足色散关系

$$\omega_A = v_A k_A\tag{16}$$

需要注意的是，光速和声速的差别巨大，如图(9)所示的相位匹配，蕴含的条件是  $|\mathbf{k}_S| = |\mathbf{k}|$ ，以及  $|\mathbf{k}_{AS}| = |\mathbf{k}|$ ，即 Bragg 衍射前后由于光场频率变化导致的波长变化可以忽略不计。因此波矢匹配条件对应的是  $\sum_j \mathbf{k}_j$  形成等腰三角形。

## A. 声光调制

事实上，上述声光散射过程的物理完全可以被线性介质中的波动方程描述

$$(\nabla^2 + \frac{n^2(\mathbf{r}, t)}{c^2})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (17)$$

其中  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{E}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \mathbf{E}_S e^{i(\mathbf{k}_S\cdot\mathbf{r}-\omega_S t)} + c.c.$ 。而折射率  $n = n_0 + \delta n e^{i(\mathbf{k}_A\cdot\mathbf{r}-\omega_A t)} + c.c.$  由声波驱动。

做慢变化振幅分析，可以得到图(9)过程。做光学实验的同学知道，图(9)(a,b) 对应于声光调制器的两种用法，用于对入射光  $\mathbf{E}$  进行升频和降频。图(9)(a,b) 中的声波，分别由电极从声光晶体上方和下方以压电效应驱动。我们考察  $|\mathbf{k}_A| \ll |\mathbf{k}|$  的小角度衍射，设  $\mathbf{k} \approx k\mathbf{e}_z + \frac{1}{2}k_A\mathbf{e}_x$ ，因此有

$$\begin{aligned} i\partial_z \tilde{\mathbf{E}}_S &= \frac{\omega}{c} \tilde{S}_A^* \tilde{\mathbf{E}}, \\ i\partial_z \tilde{\mathbf{E}} &= \frac{\omega}{c} \tilde{S}_A \tilde{\mathbf{E}}_S \end{aligned} \quad (18)$$

上式中我们假设了完全匹配:  $\mathbf{k} - \mathbf{k}_S = \mathbf{k}_A$ ,  $\omega - \omega_S = \omega_A$ 。振幅  $\tilde{S}_A = \delta n = \eta \delta \rho(\mathbf{k}_A)$  描述折射率的周期波动  $S_A = \tilde{S}_A e^{i\mathbf{k}_A\cdot\mathbf{r} - i\omega_A t} + c.c.$  的慢变化振幅 (包络面)。 $\delta \rho(\mathbf{k}_A)$  是声场密度波的  $\mathbf{k}_A$  分量。 $\eta$  是光弹性系数: 晶体密度变化导致折射率变化。

## B. 声光耦合

式(11)是说晶体的密度波会导致折射率变化，进而驱动  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_S$  光场的 Bragg 耦合。反过来说， $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_S$  的动态干涉是啥样？是不是会驱动声波形成呢？

我们看光强：

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= |\tilde{\mathbf{E}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}_S e^{i\mathbf{k}_S\cdot\mathbf{r}-i\omega_S t}|, \\ &= \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_S^* e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_S)\cdot\mathbf{r}-i(\omega-\omega_S)t} + c.c. + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

如果  $\mathbf{k} - \mathbf{k}_S = \mathbf{k}_A$ ,  $\omega - \omega_S = \omega_A$ ，那么可以想象，声波可以被相干驱动。这个过程是布里渊散射。

布里渊散射以光场干涉驱动声波振幅，如下我们写出式(18)中  $S_A$  的方程。非稳态情形下，这个方程的形式和式(11)中的  $S_m$  在时间上是类似的。在声光耦合过程中，更加常见的是稳态的空间声场振幅分布，为此，我们需要引入空间微分：

$$\dot{S}_a \rightarrow \dot{S}_A + \mathbf{v}_A \cdot \nabla S_A$$

然后在稳态忽略时间导数。继续沿用图(18)的空间设置，最后有：

$$i(\partial_x + \kappa)\tilde{S}_A = \xi k_A \mathbf{E} \mathbf{E}_S^* e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (20)$$

其中系数  $\xi$  取决于声光效应的具体机制，如光致收缩等（见 Boyd）。

在式(20)中我们引入了波矢失配 ( $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_S - \mathbf{k}_A$ ) 对布里渊过程进行更加一般的描述。 $\kappa$  是声场耗散系数，常常较大，因此声场振幅的估计也常常在计入波矢失配  $\Delta\mathbf{k}$  后通过忽略  $\partial_x$  偏导项来获得：

$$\tilde{S}_A \approx \frac{\xi}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_S - \mathbf{k}_A) \cdot \mathbf{e}_x + i\kappa} k_A \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{E}}_S^* \quad (21)$$

好了，式(18)和式(20)实际上是耦合波方程，描述的正是受激布里渊散射。

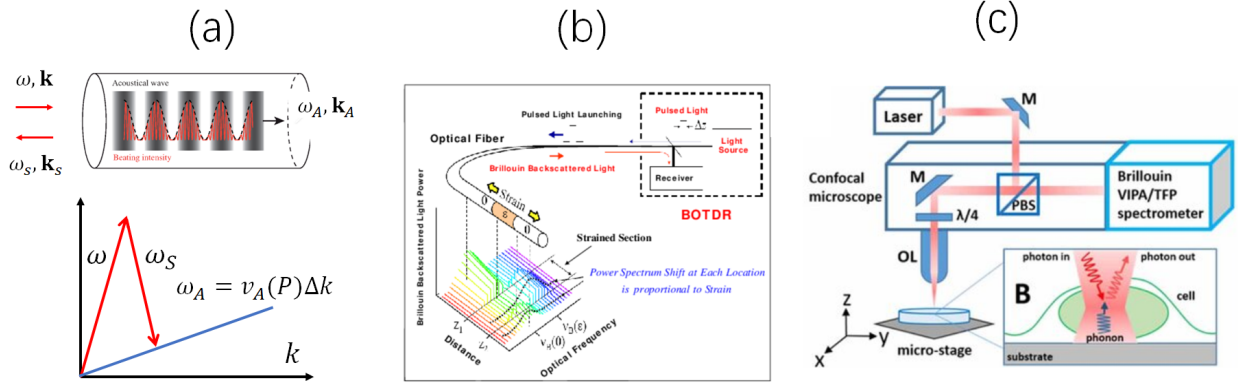


图 10. (a): Brillouin scattering along a single-mode fiber. The dispersion diagram below illustrate phase-matching, as well as  $\omega_A(P) = v_A(P)\Delta k$  for remote-sensing of  $P$ - parameters.(b): Schematic of distributed Brillouin sensing (from online). (c): Brillouin Microscopy (Poon et al ,J. Phys. Photonics 3 012002).

### C. 自发布里渊散射

#### 1. 布里渊散射成像

见图(10)c, 结合式(20)以及式(16), 生物样品不同成分的声波速度  $v_A$  不同。可以通过聚焦激光激发样品, 反向收集自发布里渊散射, 分析  $\omega_A = v_A\Delta k$  频谱, 获得样品成分信息。

#### 2. 布里渊散射传感

见图(10)b, 结合式(20)以及式(16), 还是通过光纤背向布里渊散射频移  $\omega_A = v_A(P)\Delta k$ , 结合脉冲光延时测距, 可以推知远处光纤环境参数  $P$ , 这个  $P$  可以是应力, 温度, 等等, 工程上非常有用。

### D. 受激布里渊散射

由式(18)式(20)联立方程描述的光散射过程。

#### 1. 布里渊激光

结合式(18)式(21), 见拉曼激光相关讨论。

第四次作业第二部分

1) 考察图(5), 详细推导图中折射率变化公式, 并数值重现图 (a) 的增益和相移曲线。

2) 请结合图(6), 详细推导图中 EIT 公式, 并讨论如何用  $\mathbf{E}_c$  光强控制信号光脉冲的群速度。

3) 考察频率失谐, 波矢失配情况,  $\omega_A \neq \omega - \omega_S$ ,  $\mathbf{k}_A \neq \mathbf{k} - \mathbf{k}_S$ , 请修改式(18), 计入失配量导致的动力学变化。

答: 针对式(18), 计入波矢失配的方法很简单, 和式(20)计入驱动光波矢失配类似, 这里我们考虑声场存在波矢失配: 考虑  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_A + \mathbf{k}_S - \mathbf{k}$ ,  $\Delta\omega = \omega_A + \omega_S - \omega$ , 那么直接写入振幅  $\tilde{S}_A \rightarrow \eta\delta\rho(\mathbf{k}_A)e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Delta\omega t}$ , 并替换  $\partial_z \rightarrow \partial_z + \frac{n}{c}\partial_t$  引入  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{E}_S$  的含时微分即可。。注意在式(18)的实际应用中,  $\tilde{E}_S$  常常是由  $\tilde{E}$  以及外加  $S_A$  驱动产生, 从式(17)波动方程出发推导式(18)振幅方程的通常做法是约定  $\Delta\omega = 0$ 。

当然, 和式(20)后续推导类似, 如果失配较大, 我们也可以重写定义包络函数  $\tilde{S}_A$ , 把指数相位吸收进入  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{E}_S$  的定义, 注意定义过程中确保  $\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_A = 0$  使得在我们约定的光场传播方向上  $\Delta\mathbf{k} = \Delta k \mathbf{e}_z$ , 进而在微分算符中分开, 获得,

$$\begin{aligned} i\partial_z \tilde{\mathbf{E}}_S &= -\frac{\Delta k}{2} \tilde{\mathbf{E}}_S + \frac{\omega}{c} \tilde{S}_A^* \tilde{\mathbf{E}}, \\ i\partial_z \tilde{\mathbf{E}} &= \frac{\omega}{c} \tilde{S}_A \tilde{\mathbf{E}}_S + \frac{\Delta k}{2} \tilde{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (22)$$

4) 继续上一题, 请引入 Pauli 算符, 尽力将你的结果规整成二能级 Bloch 球动力学。

5) 考察式(20), 式(21)在单模光纤中的应用 (图(10)), 结合网络资源调查, 定性/半定量解释单模光纤耦合大功率激光时出现强烈反射的现象。这个反射极大的限制了单模光纤输运大功率激光的能力。你能想到什么方法避免这个现象的发生吗?