rev: 2024/04/27

三阶非线性效应-II

吴赛骏*

复旦大学物理系，上海 *200433,* 中国。

本文档随教学进程跟新。

I. 光 KERR 效应和简并四波混频

A. 回顾：光克尔 $\chi^{(3)}$ 的微扰计算

1）和频过程相对简单

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega$$

2）四波混频

$$\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 = \omega$$

四波混频的计算牵涉到基态和亚稳态作为中间态。如果没有亚稳态，那么基态的“发散”可以简单的消除。我们考虑 $\omega_2 = \omega_1 + \delta$, $\omega = \omega_3 - \delta$, 那么 $\chi^{(3)}(\omega;\omega_1,-\omega_2,\omega_3)$ 中二能级贡献由式(1)给出：

$$\chi^{(3)}_{2-\mathrm{level}}(\omega;\omega_1,-\omega_1,\omega) = -\sum_e \rho \frac{1}{\hbar^3}\frac{|\mathbf{d}_{eg}|^4}{|\tilde{\Delta}_{eg,1}|^2\tilde{\Delta}_{eg}} \tag{1}$$

当然，我们还有激发态作为中间态的双光子贡献，

$$\chi^{(3)}_{2-\mathrm{photon}}(\omega;\omega_1,-\omega_1,\omega) = \sum_{e,e'} \rho \frac{1}{\hbar^3}\frac{|\mathbf{d}_{eg}|^2|\mathbf{d}_{e'e}|^2}{\tilde{\Delta}_{eg}\tilde{\Delta}_{e'e}\tilde{\Delta}_{eg}} \tag{2}$$

此前已经讨论，在远离光学跃迁共振的情形下，常常是 $|\chi^{(3)}_{2-\mathrm{photon}}| > |\chi^{(3)}_{2-\mathrm{level}}|$, 因此有 $\chi^{(3)} > 0$。这个容易理解，对于库仑场中运动的电子，施加电场越大，越容易拉动电子云偏离轨道。

B. 光强相关的折射率

首先考虑单一频率光的光强相关折射率

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &= n_0 + n_2 I(\mathbf{r}), \\ n_2 &= \frac{3\chi_1^{\mathrm{IDRI}}}{4n_0^2 c\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\chi_1^{\mathrm{IDRI}} = \chi_1^{(3)}(\omega;\omega,-\omega,\omega)$；而

$$I(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 c|\tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r})|^2 \tag{4}$$

是单频光的光强。注意，以下为论述方便，偶尔我们会更改非线性折射率定义,

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &= n_0 + n_2|\tilde{\mathbf{E}}|^2, \\ n_2 &= \frac{3\chi_1^{\mathrm{IDRI}}}{4n_0^2} \end{aligned} \tag{5}$$

在 $\chi_1^{(3)}$ 的频率带宽以内，上述表达式可以推广到含时光场,

$$n(\mathbf{r},t) = n_0 + n_2 I(\mathbf{r},t) \tag{6}$$

对于远失谐光场来说，$\chi_1^{(3)}$ 的响应可以是飞秒超快，因此，式(6)可以是超快时间尺度上物质折射率对局域光强的线性响应。

* saijunwu@fudan.edu.cn

C. 光 Kerr 效应测光强

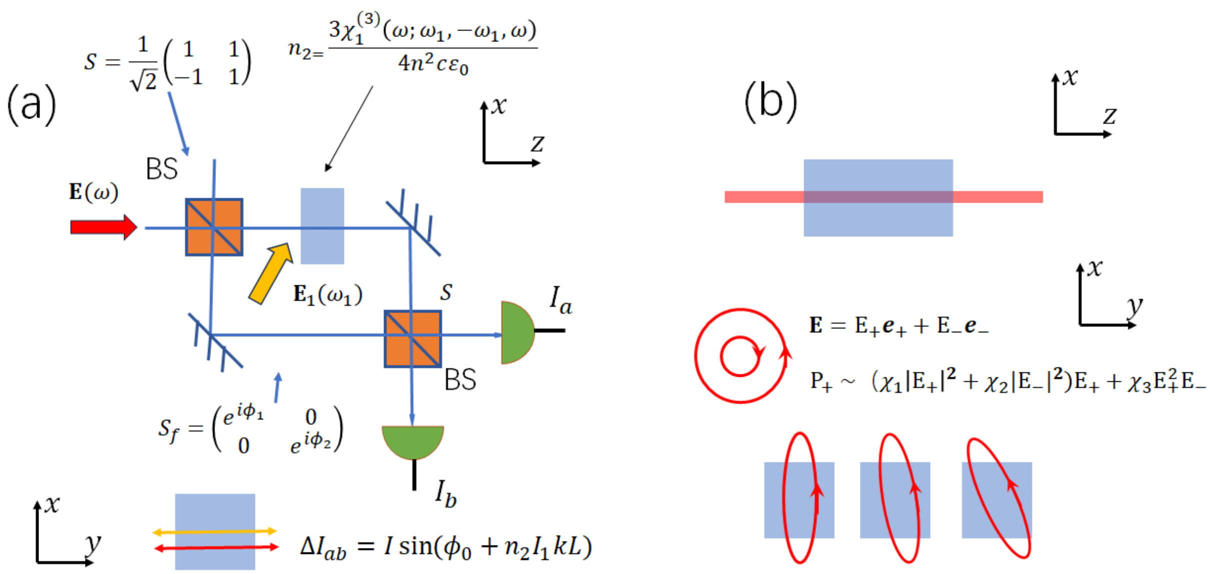


图 1. (a): Mach-Zehnder Interferometer to perform non-demolishing I_1 intensity measurement using Kerr effect. (b): SR: Self-rotation of elliptical light.

1. *M-Z Interferometer*

如图 (1)a 的马赫-曾德干涉仪，我们考察输入输出关系

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{a,\mathrm{out}} \\ \tilde{E}_{b,\mathrm{out}} \end{pmatrix} = S_{\mathrm{MZ}} \begin{pmatrix} \tilde{E}_{a,\mathrm{in}} \\ \tilde{E}_{b,\mathrm{in}} \end{pmatrix}, \quad S_{\mathrm{MZ}} = S S_f S \tag{7}$$

其中我们考虑两个相同的分束器，传输矩阵为

$$S = \begin{bmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{bmatrix} \tag{8}$$

并由 $|t|^2 + |r|^2 = 1$ 保证幺正性。

干涉仪中间两个模式的“自由传播”的传输矩阵为

$$S_f(\varphi_{1,2}) = \begin{bmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

以下我们考虑 50/50 分束镜，$r = t = \frac{1}{\sqrt{2}}$。此外，不失一般性，我们对传播相位对称化,$\phi_1 = -\phi_2 = \phi/2$, 因此有

$$S_{\mathrm{MZ}} = \begin{bmatrix} \cos\phi/2 & \sin\phi/2 \\ -\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

2. 无损光强测量

有了式(7)(10)，我们考虑如图(1)a $\mathbf{E}$ 从 b 端口输入，a 端口为空。可以分析输出光强差：

$$\begin{aligned} I_b - I_a = |\tilde{E}|^2 \cos\phi, \\ \phi = \phi_0 + n_2 I_1 k L \end{aligned} \tag{11}$$

式(11)是说，通过读取干涉仪输出，反推相位 ϕ，可用来监控 I_1 光强。这样的光强探测方法是“无损”的，被监控的 I_1 光束可以继续应用，包括继续进行无损测量。可以想象，测量精度随着测量时间变得更加精确。

如图(1)a 的测量方法，是否可以达到单光子级别的精度，即 I_1 中增减一个光子，可以足够大的改变探测光干涉相位？目前量子光学前沿的基本结论是，由于和光学跃迁相关的散射损耗限制，这个目标在自由空间是无法实现的。

D. 椭偏光的自转 (SR)

式(3)考察的是相同偏振光场间的折射率调制。计入偏振后，折射率的变化会变得稍微复杂。我们回顾各项同性介质中的三阶系数：

$$\chi_1^{(3)} = \chi_2^{(3)} + \chi_2^{(3)} + \chi_3^{(3)}$$

$$\chi_2^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)}$$

$$\chi_3^{(3)} = \chi_{xyxy}^{(3)}$$

$$\chi_4^{(3)} = \chi_{xyyx}^{(3)}$$

考察如图(1)b 的入射光偏振为

$$\mathbf{e} = \cos(\frac{\theta}{2}) e^{-i\varphi/2} \mathbf{e}_+ + \sin(\frac{\theta}{2}) e^{+i\varphi/2} \mathbf{e}_- \tag{12}$$

其中 $\mathbf{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm \mathbf{e}_y)$。式(12)中 θ, ϕ 参量决定的光场偏振的椭偏性。例如，$\theta = 0$ 代表圆偏，$\theta = \pi$ 代表反圆偏，而在 $\theta = \pi/2$ 时，ϕ 值决定了线偏振光在 $x - y$ 平面的方向。

如图(1)b 所示，$\theta \neq 0, \pi/2, \pi$ 的一般椭偏情况下，光场由不同强度的圆偏振和反圆偏振相干合成。由于 $\chi_1 > \chi_2$，较强的分量会感受到更大的折射率变化。此外，χ_3 还会导致两个分量的互相耦合。一般来说，Kerr 效应会导致椭圆偏振的取向发生转动。

E. 光 Kerr 门

我们考虑两束不同偏振光的互相调制。如图(2)所示，沿着 $x - y$ 轴 45 度方向偏振的 $\mathbf{E}_1$ 光，会导致介质的 45 度方向双折射，进而像双折射波片一样改变 $\mathbf{E}$ 光的出射偏振，并被检偏器探测到。和 L56 二阶和频技术类似，这个光科尔门技术可以用于对光脉冲进行互相关测量，表征脉冲长度。

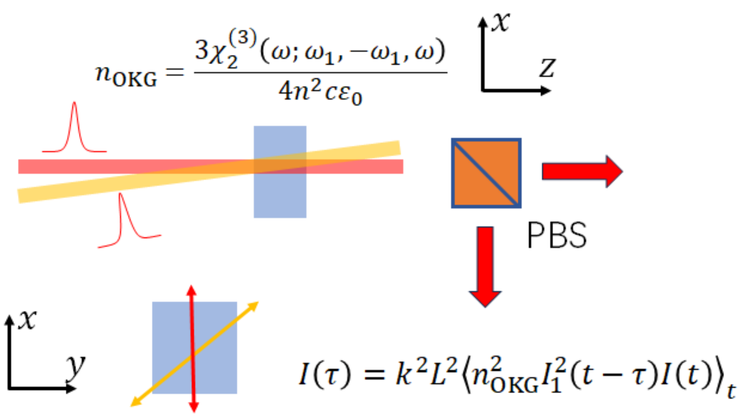


图 2. Ultrafast Optical Kerr gate.

F. 简并四波混频的光栅图像

所谓简并四波混频，即参与三阶过程的四束光频率相同，

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{j=1}^{4} \tilde{\mathbf{E}}_j e^{i\mathbf{k}_j\cdot\mathbf{r}-\omega t} + c.c. \tag{13}$$

简并四波混频的物理原因是如式(5)描述的光强相关折射率变化。我们有

$$n(\mathbf{r}) = n_0 + n_2 \left|\sum_{j=1}^{4} \tilde{\mathbf{E}}_j e^{i\mathbf{k}_j\cdot\mathbf{r}}\right|^2 \tag{14}$$

我们写出光场 $\mathbf{E}$ 的波动方程

$$(\nabla^2 + n^2(\mathbf{r})\frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{E} = 0 \tag{15}$$

对式(14)右边做二项式展, 并考察式(15)的慢变化振幅 $\tilde{\mathbf{E}}_j$, 进入耦合波方程的方法可以分为四类，如图(3)右所示。

1. 相位匹配

图(3)中自相位调制和互相位调制，相位匹配都是自动发生的。

$$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

在下节课中我们会发现，拉曼共振会导致“自相位调制”,“互相位调制”出现折射率虚部，形成光放大和光衰减，拉曼过程的相位匹配也是自动发生的。

图(3)中标红的过程比较奇怪，$\tilde{\mathbf{E}}_1$ 和其复共轭 $\tilde{\mathbf{E}}_1^*$ 耦合，这要求, 例如，

$$\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1$$

这个只能是 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1$。即参与的光场频率，波矢均相同。那么，什么不同呢？只能是偏振不同了，和这个过程对应，我们在第 ID中介绍的椭偏光偏振自转动是比较少的案例。

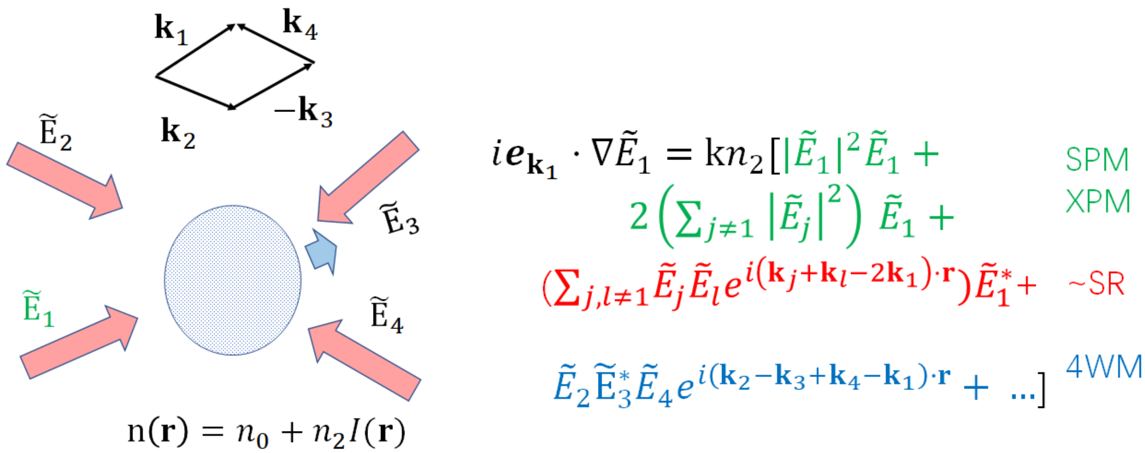


图 3. Grating picture of degenerate 4-wave mixing. The four beams $\tilde{E}_{1,2,3,4}$ forms interference pattern in space, generting index gratings. Here we are particularly interested in the "4WM"-term marked in blue: The grating formed by $\tilde{E}_{2,3}$ interference diffracts $\tilde{E}_4$ to $\mathbf{k}_1$ direction, if $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$.

图(3)中标蓝过程是“真正的”简并四波混频过程。和“自相位调制”，“互相位调制”中相位匹配自动满足不同，这个过程相位匹配变得重要。见图中公式。

G. 光学共轭及应用

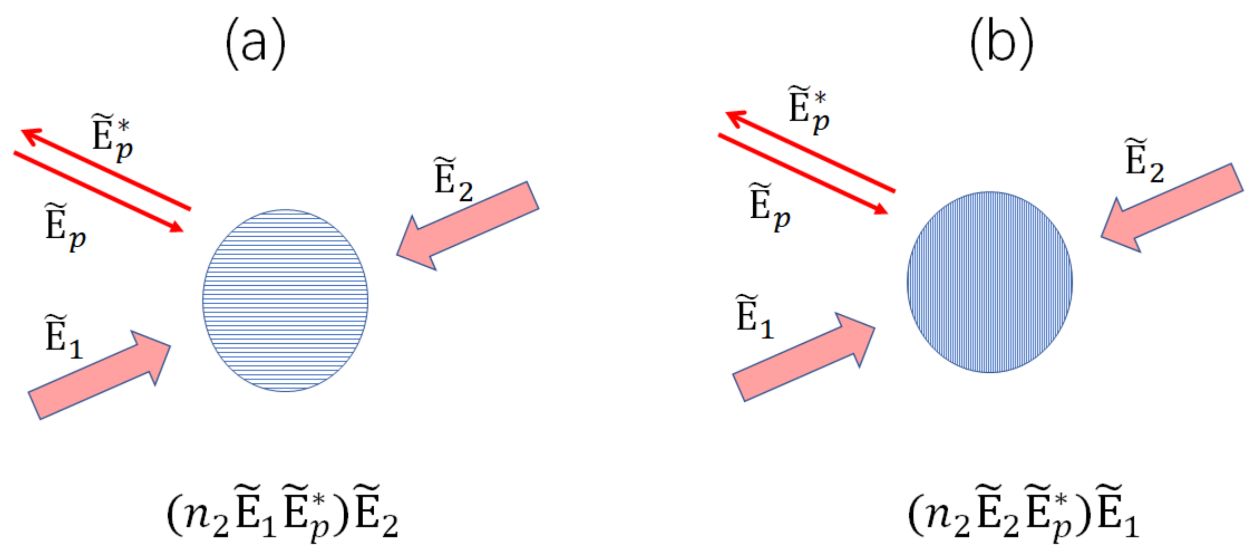


图 4. Optical phase conjugation as dynamic holography. (a) and (b) are two co-existing diffraction processes that convert the incoming $\tilde{E}_p$ into its time-reversal beam.

1. 共轭波前

我们可以对单色光场的缓慢变化振幅 (包络函数) 取复共轭，称

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r},t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}+c.c.) \tag{16}$$

为 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 光场的共轭光场。基于周期函数的定义，如式(16)的光学共轭显然导致包络函数 $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ 的时间反演。注意，在光学成像领域，我们常常也称空间包络面为波前。因此式(16)$\mathbf{E}_c(\mathbf{r},t)$ 中的包络函数也称为 $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ 的共轭波前。

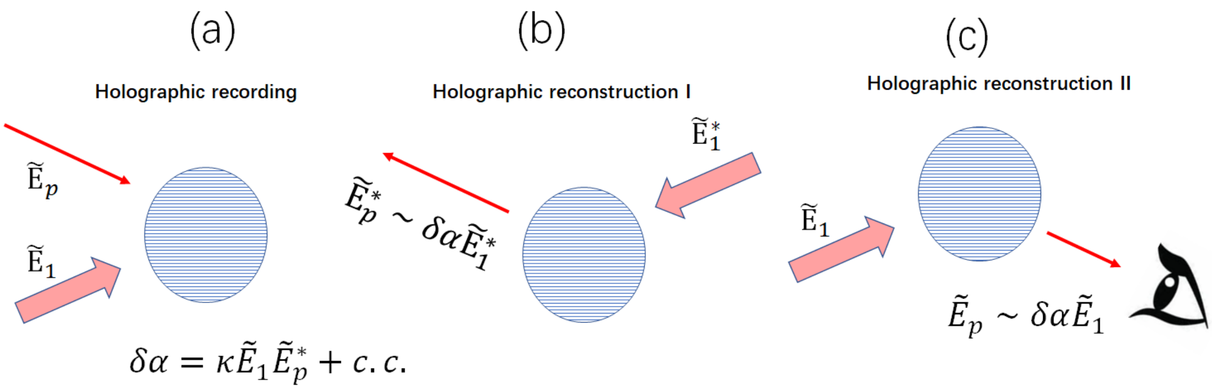


图 5. Principle of optical Holography. (a): recording of hologram. (b): reconstructing the time-reversed output. (c): reconstructing the original field.

2. 布拉格衍射

我们考虑介质的折射率分布存在 $\Delta\mathbf{k}$ 分量，

$$n(\mathbf{r})=n_0+\delta n(\Delta\mathbf{k},\mathbf{r})e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+c.c.+\text{other }\mathbf{k}\text{ components}. \tag{17}$$

其中 $\delta n(\Delta\mathbf{k},\mathbf{r})$ 为折射率分布的缓慢变化振幅（包络面）。那么, 从式(15)开始推导 $\mathbf{k}_{\rm in}$, $\mathbf{k}_{\rm in}$ 分量的振幅耦合，从 $\mathbf{k}_{\rm in}$ 到 $\mathbf{k}_{\rm out}=\mathbf{k}_{\rm in}+\Delta\mathbf{k}$ 的布拉格衍射可以做如下一般描述 (另见 L10 讨论)

$$\begin{gathered} i\mathbf{k}_{\rm out}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}_{\rm out},\mathbf{r})=n_0\delta n(\Delta\mathbf{k},\mathbf{r})\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}_{\rm in},\mathbf{r}) \\ \Delta\mathbf{k}=\mathbf{k}_{\rm out}-\mathbf{k}_{\rm in} \end{gathered} \tag{18}$$

3. 光学共轭

我们考虑如图(4)a 的四波混频过程。

1) $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 光为准直光，且 $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2$。那么自然有

$$\tilde{\mathbf{E}}_2=\tilde{\mathbf{E}}_1^*$$

2) 入射” 信号光”$\mathbf{E}_p$ 会和 $\tilde{\mathbf{E}}_1$ 干涉，条纹的空间周期一定是 $\pm\Delta\mathbf{k} = \pm(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_p)$。对于由 $\mathbf{E}_p^*\tilde{\mathbf{E}}_1$ 干涉产生的 $+\Delta\mathbf{k}$ 分量，$\tilde{\mathbf{E}}_2$ 入射光一定满足衍射到 $-\mathbf{k}_p$ 方向的布拉格条件。

3) 对于 $\tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{r})$ 复杂波前，$\mathbf{E}_p^*\tilde{\mathbf{E}}_1$ 干涉产生的折射率条纹 $\delta n(\Delta\mathbf{k},\mathbf{r})$ 存在空间依赖性。如果空间变化足够缓慢，$|\nabla\delta n(\Delta\mathbf{k},\mathbf{r})| \ll |\Delta\mathbf{k}\delta n(\Delta\mathbf{k},\mathbf{r})|$, 那么式(18)仍然成立。上述过程基本仍能做到 $\tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{r}) \to \tilde{\mathbf{E}}_p^*(\mathbf{r})$。

4) 同时发生的另一个过程见图(4)c. 有趣的是，两个过程相干相长。

4. 光学共轭的应用

混沌介质传播光束光束的精确回射

自动纠正成像像差

...

但是实用尚有限，原因是图(4)过程的效率常常很低。

另见第 III讨论。

5. 光学共轭是动态全息

见图(5)。全息和光学共轭的不同之处如下：

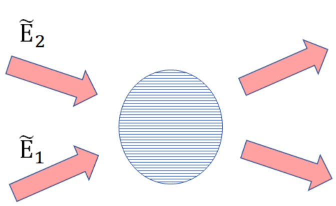
1) 基于传统感光胶片 (或三维感光体）曝光的全息，记录全息条纹常常是透射率变化，当然，也可以做折射率变化。

2) 全息记录过程中常常只有一束参考光。还原的时候可以选择参考光方向，形成“原像还原”(图(4)b) 或者“共轭像还原”(图(4)c)

3) 全息的记录和还原是分开的。这两个过程在光学共轭过程中同时发生。

此外，全息记录还可以用数字相机，那么全息记录后，信号光场的全息信息还原可以完全通过计算完成。

H. 简并双波耦合?



$$i\partial_z\tilde{E}_1 = -n_2\frac{\omega}{c}(\tilde{E}_1\tilde{E}_2^*)\tilde{E}_2 + n_2\frac{\omega}{c}\left(|\tilde{E}_2|^2 + |\tilde{E}_1|^2\right)\tilde{E}_1$$
$$= -n_2\frac{\omega}{c}\left(2|\tilde{E}_2|^2 + |\tilde{E}_1|^2\right)\tilde{E}_1$$

图 6. Degenerate two-wave mixing in $\chi^{(3)}$ medium.

如图(6)，简并“二波混频”可能吗？不可能。由于折射率光栅的相位和干涉光强分布完全一致。$\tilde{\mathbf{E}}_2$ 向 $\tilde{\mathbf{E}}_1$ 的衍射振幅 (右边公式第一项）和 $\tilde{\mathbf{E}}_1$ 存在 $\pi/2$ 相移，其效果即互相位调制（第二项）。不存在能量交换。

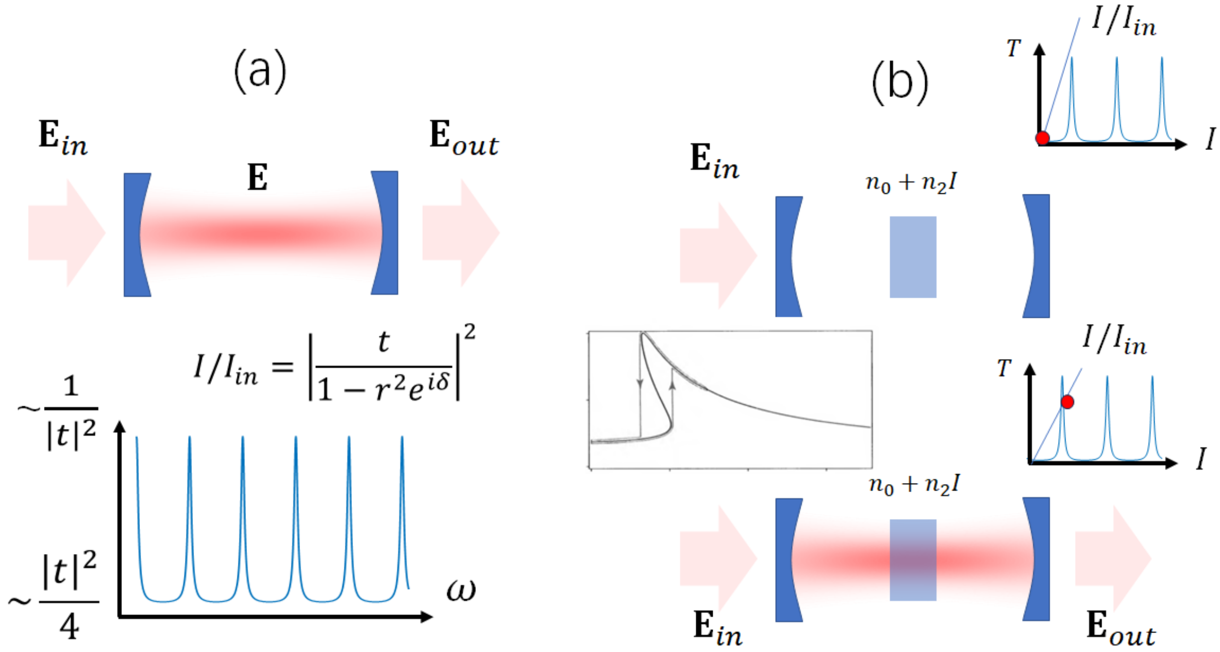


图 7. (a): Transmission spectrum of a Fabry-Perot Cavity. (b)：Optical bistability. The inset plot from Powers book showing the bistability curve.

I. 光学双稳

1. 法布里-普罗腔的输入输出关系

考察如图(7)a 的腔内光场和入射光场的关系，由反射系数为 r 的输入反射镜联系。我们考察“对称腔”，即第二个反射镜的反射系数也是 r，并记 $R=|r|^2$ 为反射率。还引入透射系数 t 以及透射率 $T=|t|^2$。显而易见的是，腔内光场 $\mathbf{E}$ 和输入光场 $\mathbf{E}_{\text{in}}$ 满足：

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= t\mathbf{E}_{\text{in}} + r^2 e^{i\delta}\mathbf{E}, \\ \delta &= 2kL + i\alpha. \end{aligned} \tag{19}$$

这里我们认为 F-P 腔的等效长度为 L,α 是腔内的损耗, 那么有

$$I = I_{\text{in}}\frac{|t|^2}{|1-r^2e^{i\delta}|^2}. \tag{20}$$

接下来我们姑且认为 $\alpha=0$ 无损耗，且 $R+T=1$。图(7)a 下图给出式(20)曲线。注意自由光谱范围 ω_{FSR}，共振线宽 κ,，光强共振增益 $(I/I_{\text{in}})_{\max}$:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{FSR}} &= 4\pi c/L, \\ \kappa &= 2\omega_{\text{FSR}}|t|^2, \\ (I/I_{\text{in}})_{\max} &= 1/|t^2|. \end{aligned} \tag{21}$$

当入射光频率和光学腔共振时，腔内光场强度可以被增强 $1/T$ 倍。这个增强对于非线性光学当然是有益的。当然，这个增强是基于光场在腔内多次反射，非线性过程频域带宽和时域响应速度受限于共振线宽 κ。

2. 光学双稳、全光计算

图(2)可以认为是光学“三极管”
图(7)b 的双稳，可以用于全光存储。
那么，加起来，可以做计算了 == 光子芯片集成的好处：低功率高光强非线性光学。
全光计算相比于电子计算：
1) 速度和串扰
2）集成化难度，功率要求
总之，难度非常大。
共振增强，抑制耗散 ==> 未来光量子计算。

J. (反) 饱和吸收

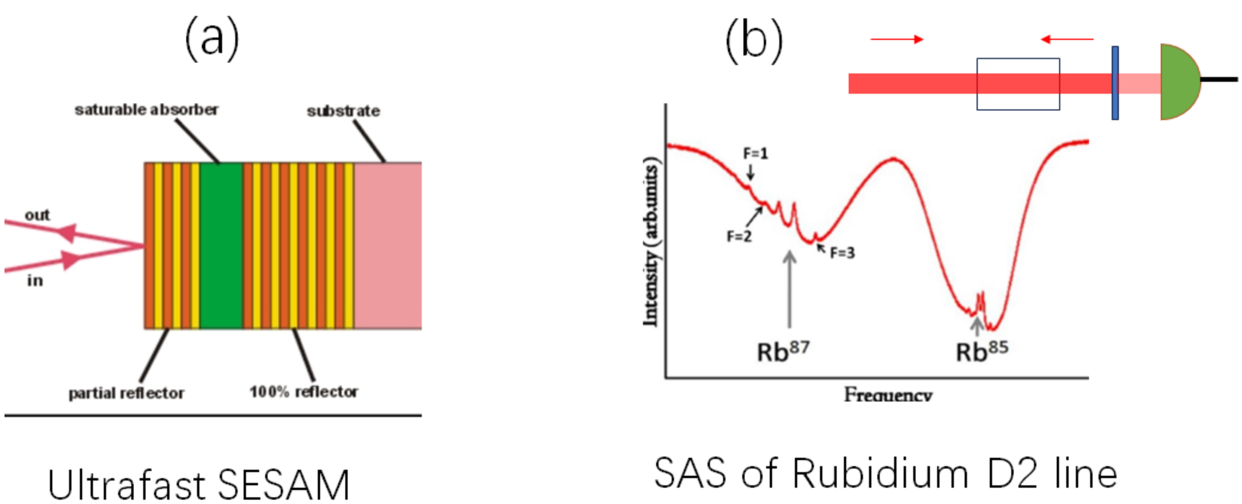


图 8. (a): Semiconductor Saturation Absorption Mirror (From online) (b): Saturation absorption spectroscopy of Rubidium Vapor (Lamb Dips)

考察式(1), 共振激发下 $\chi^{(3)}$ 是虚数。
$\mathrm{Im}[\chi^{(3)}] < 0$：饱和吸收。
$\mathrm{Im}[\chi^{(3)}] > 0$：反饱和吸收。
反应速度取决于弛豫率 Γ_e, 在固体体系中可以高达皮秒级。图(8)a 典型超快应用
饱和吸收光谱在原子物理，激光技术中非常重要。图(8)b 典型原子光谱应用。

II. 时空局域光场的光 KERR 效应

以上我们考虑的光场，其频率 ω_j, 波矢 $\mathbf{k}_j$ 是分离的。现实生活中这样的单色平面波光场并不存在。在 L2 我们已经介绍，时空局域光场常可以用缓慢变化振幅 (包络函数) 描述，

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}\sum_j\tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r},t)e^{i\mathbf{k}_j\cdot\mathbf{r}-i\omega_j t}+c.c. \tag{22}$$

如果我们进一步对包络函数 $\tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r},t)$ 做傅里叶变换，会产生 $\omega,\mathbf{k}$ 的连续分布。这样的连续分布在 $\chi^{(2)}$ 二阶效应中体现出的复杂性比较有限（如超快太赫兹产生）。在四波混频中，就变得非常麻烦。原因如图(3)所示，各类四波混频相位匹配很容易实现。

A. 回顾：慢变化振幅的非线性波动方程

我们考察单个脉冲光, 结合式(3)，并做和 L56 类似的近似后，可以得到

$$i\left(\mathbf{e_k}\cdot\nabla-\frac{1}{v_g}\partial_t\right)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)=\left(-\frac{1}{2k}\nabla_\perp^2+\frac{\bar{n}^2-n^2(\mathbf{r})}{2\bar{n}}\frac{\omega}{c}+\frac{1}{2}\beta_2\partial_t^2-\frac{n_2\omega}{c}I(\mathbf{r},t)\right)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) \tag{23}$$

其中我们引入了平均折射率 $\bar{n}$, 空间折射率变化项 $\frac{\bar{n}^2-n^2(\mathbf{r})}{2}\frac{\omega}{c}$, 因此有

$$\begin{aligned}k&=\bar{n}\frac{\omega}{c},\\ v_g&=(\frac{dk}{d\omega})^{-1}=\frac{c}{\bar{n}+\omega\frac{d\bar{n}}{d\omega}},\\ \beta_2&=\frac{d^2k}{d\omega^2}\end{aligned} \tag{24}$$

需要注意的是，式(23)的推导中忽略了非线性极化率本身慢变化振幅的时间微分，在式(23)中表现为 $\partial_t(n_2I)$ 的形式。其中平均部分可以吸收到式(24)中的 $\bar{n}$ 定义:

$$\bar{n}\rightarrow\bar{n}+n_2\bar{I}. \tag{25}$$

1. 空间折射率变化

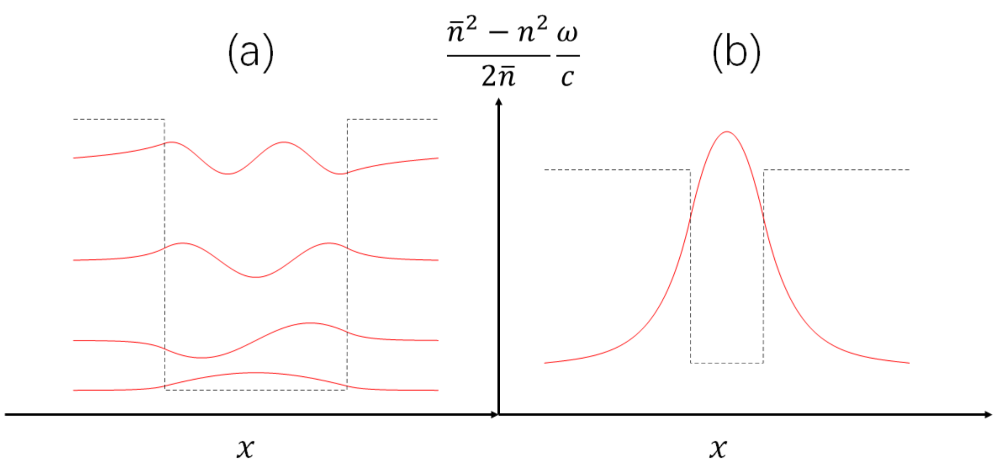


图 9. (a): Transverse mode profiles $\tilde{E}(x)$ for a multi-mode waveguide. (b): Transverse mode profile $\tilde{E}(x)$ for a single-mode waveguide.

我们只考虑稳定单色光及线性折射，那么式(23)退化为二维薛定谔方程:

$$i\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})=\left(-\frac{1}{2k}\nabla_{\perp}^{2}+\frac{\bar{n}^{2}-n^{2}(\mathbf{r})}{2\bar{n}}\frac{\omega}{c}\right)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\tag{26}$$

案例:

1) 海市蜃楼
2) 沙漠湖影
3) 多模波导
4) 单模光纤

B. 自聚焦和自散焦

考虑自由传播的单色光场，

$$i\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})=\left(-\frac{1}{2k}\nabla_{\perp}^{2}-\frac{n_{2}\omega}{c}I(\mathbf{r})\right)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\tag{27}$$

式(27)是非线性薛定谔方程。按照上小节讨论，我们知道大折射率对应于光场传播横向的“势阱”，可以一定程度上补偿光场衍射 $\nabla_{\perp}^{2}$ 造成的光束发散，甚至形成光束缚态。这里，在自由空间中，如果 n_2 为正，那么式(28)右边的两项贡献也有互相抵消的趋势。n_2I 项在空间自己写出一个折射率变化透镜，阻止光场衍射，帮助光场聚焦，是为“自聚焦”。

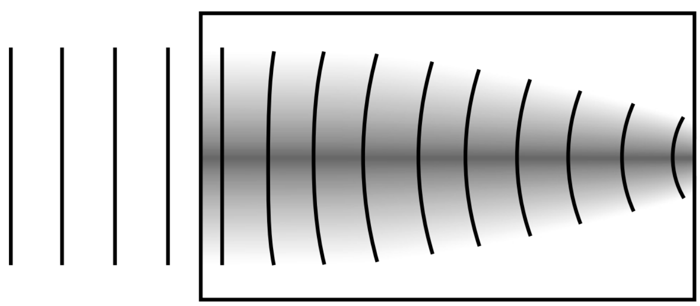


图 10. Self-focusing, from Jeffery New Book.

反过来，如果 $n_2<0$，那么光束会给自己写出一个中间小，周围大的折射率分布，像凹透镜一样帮助自己散焦，是为“自散焦”

C. 空间孤子

1. 一维情况

$$i\partial_{z}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})=\left(-\frac{1}{2k}\partial_{x}^{2}-\frac{n_{2}\omega}{c}I(\mathbf{r})\right)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\tag{28}$$

为了量化这一特点，我们引入相应的特征长度。

考虑光束的特征宽度为 w, 那么可以定义特征衍射长度

$$L_d = kw^2 \tag{29}$$

考虑光场的峰值强度为 I_0，那么可以定义非线性相移长度

$$L_{\mathrm{nl}} = \frac{c}{\omega n_2 I_0} \tag{30}$$

定义归一化量

$$\tilde{z} = z/L_d$$

$$\tilde{x} = x/w$$

$$\tilde{U} = \tilde{E}/|\tilde{E}|_0$$

$$N = \sqrt{L_d/L_{\mathrm{nl}}}$$

可得

$$i\partial_{\tilde{z}}\tilde{U} = \left(-\frac{1}{2}\partial_{\tilde{x}}^2 + N^2|\tilde{U}|^2\right)\tilde{U} \tag{31}$$

$N = 1$ 孤子解
条件：

$$\begin{aligned} L_d &= L_{\mathrm{nl}}, \text{ or} \\ I_0 &= \frac{1}{n_2 k^2 w^2} \end{aligned} \tag{32}$$

双曲正割解

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \mathrm{sech}(\tilde{x})e^{\frac{i}{2}\tilde{z}}, \\ \tilde{E} &= E_0\mathrm{sech}(x/w)e^{\frac{i}{2}z/L_{\mathrm{nl}}}. \end{aligned} \tag{33}$$

空间孤子特征

1) 光强分布: 双曲正割函数

2) 稳定：比式(32)更强的光，会自动调整到 I_0

3) 相速度：写回 $\tilde{E}e^{ikz}$ 的形式后，发现 $k \to k + \frac{1}{2L_{\mathrm{nl}}}$, 相应的相速度 $v_{\mathrm{phase}} = \omega/k$ 降低。

2. 二维情况

二维情况下孤子解更加复杂些，但是光强条件和式(32)类似。注意到 $I_0 w^2$ 代表了光功率，我们有沿着 z 方向传播，形成二维空间孤子分布光束的临界功率

$$P_{\mathrm{critical}} \approx I_0 w^2 \approx \frac{1}{k^2 n_2} \tag{34}$$

D. 强激光的分叉

Boyd Chap 7.1

E. 群速色散和自相位调制

1. 群速色散

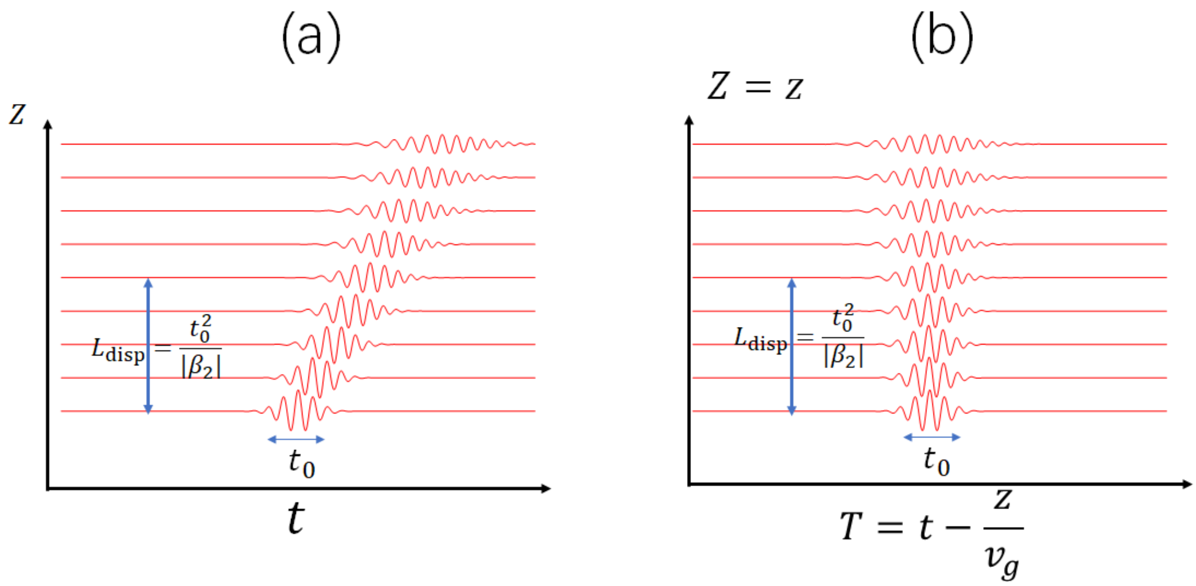


图 11. Dispersion of a Gaussian pulse in (a) $t-z$ coordinate and (b) $T-Z$ coordinate. Here $\beta_2 > 0$.

$$i\left(\partial_z - \frac{1}{v_g}\partial_t\right)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \left(\frac{1}{2}\beta_2\partial_t^2 - \frac{n_2\omega}{c}I(\mathbf{r},t)\right)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) \tag{35}$$

简化成一维问题，变量替换：

$$Z = z$$

$$T = t - z/v_g$$

在脉冲群速运动坐标系下”重写“非线性方程：

$$i\partial_Z\tilde{\mathbf{E}}(Z,T) = \left(\frac{1}{2}\beta_2\partial_T^2 - \frac{n_2\omega}{c}I(\mathbf{r},T)\right)\tilde{\mathbf{E}}(Z,T) \tag{36}$$

在 Z, T 坐标下，光脉冲的群速度没有了，$\mathbf{E}(Z,T)$ 描述脉冲形状随时间的变化, 见图(11)。

2. 群速色散

我们考察式(36)右边的第一项，为直观的刻画群速色散，我们考察 $Z=0$ 处光场包络面为**频谱变换极限**的高斯脉冲

$$\tilde{\mathbf{E}}(0,T) = \mathbf{E}_0 e^{-T^2/t_0^2}$$

那么容易得到 (φ_G 是”Gouy” 相位，见 L56 讨论)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(Z,T) &= \frac{1}{\sqrt{\pi(t_0^2+(Z/\beta_2)^2)}}\mathbf{E}_0 e^{-T^2/(t_0^2+iZ/\beta_2)+i\varphi_G},\\ \tilde{\mathbf{E}}(z,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi(t_0^2+(z/\beta_2)^2)}}\mathbf{E}_0 e^{-(t-z/v_g)^2/(t_0^2+iz/\beta_2)+i\varphi_G}\end{aligned} \tag{37}$$

注意，上式两行中我们对函数 $\mathbf{E}$ 的定义实际上是不同的，运用的时候需要注意一下。脉冲传播在 $t-z$, $T-Z$ 坐标下的案例见图(11)。

$$L_{\rm disp}=\frac{t_0^2}{|\beta_2|} \tag{38}$$

群速色散长度。脉宽 t_0，频谱变换极限高斯脉冲传播了 $L_{\rm disp}$ 后，脉冲长度增加 $\sqrt{2}$ 倍，见图(11)。

3. 群速色散讨论

针对式(37)高斯脉冲传播，令光学相位 $\varphi=\arg\tilde{E}$ 并引入归一化 Z 坐标 $\tilde{Z}=Z/L_{\rm disp}$, 有

$$\omega(Z)=-\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{\tilde{Z}}{t_0^2(1+\tilde{Z}^2)}\approx\frac{1}{t_0^2\tilde{Z}}=\frac{1}{\beta_2 Z} \tag{39}$$

我们可以结合图(11)案例中沿着 T 轴，解读一下频率变化：$\beta_2>0$，频率随时间上升，是为正啁啾；$\beta_2<0$ 频率随时间下降，是为负啁啾。从 L56 我们知道，$\omega=\omega(k)$ 色散关系的二阶导数常常是负数。其反函数 $k=k(\omega)$ 的二阶导数也就常常是正数。

另一方面，考察图(11)a，在 $t>0$ 时刻, 沿着 z 轴，我们发现低频光会跑得更远，这是正群速色散 $\beta_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{1}{v_g}>0$ 的特征，红光跑得快。

当然我们记得，正常色散介质中还有红光的相速度大，两者不要搞混了。

4. 频谱变换极限脉冲

所谓频谱变换极限脉冲，即时域宽度 Δt 和频域宽度 $\Delta\omega$ 乘积在时间频率不确定关系限制下取最小值

$$\Delta\omega\Delta t=S_0 \tag{40}$$

这里 S_0 是和脉冲形状相关的一个数。对于式(37), 图(14)b 中 $Z=0$ 的高斯脉冲来说，$S_0=\pi$.

容易证明，频谱变换极限脉冲的包络函数一定是相位均匀的。

5. 自相位调制

在 $z\ll L_{\rm disp}$ 的时候，我们仅我们考察式(36)右边的第二项, 得到简单解

$$\tilde{E}(Z,T)=\tilde{E}(0,T)e^{i\omega n_2 zI(T)/c} \tag{41}$$

因此有自相位调制：

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\omega n_2 zI(t)/c,\\&=-\frac{z}{L_{\rm spm}}\frac{I(t)}{I_0},\\ \delta\omega(t)&=\frac{z}{L_{\rm spm}}\frac{I'(t)}{I_0}.\end{aligned} \tag{42}$$

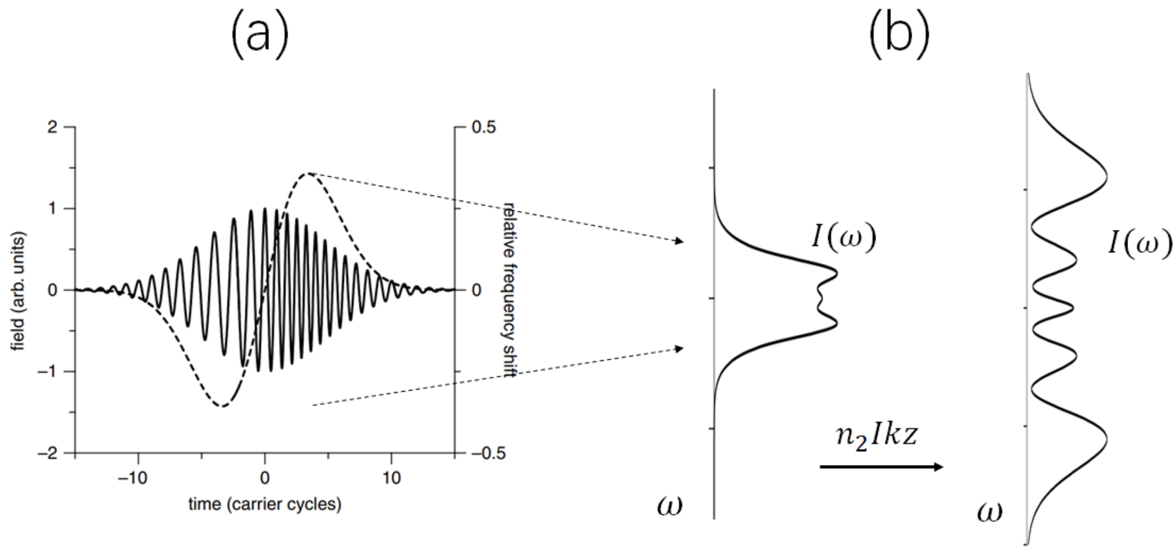


图 12. (a) Self-phase-modulation of a Gaussian pulse according to Eq. (41). (b): Spectrum of (a) at two distance z. Plots are from Jeffery New Book.

其中我们定义自相位调制特征长度

$$L_{\mathrm{SPM}} = \frac{c}{\omega|n_2|I_0} \tag{43}$$

为自相位调制特征长度。案例见图(12)。

由于不考虑群速色散，因此式(41)脉冲解在时域上光强分布 $I(Z,T) = I(T)$ 是不变的。由于式(3)相关讨论，我们知道在一般透明介质中，$n_2 > 0$。与此相应，图(12)a 中主要成分的频率变化是“正啁啾”，和图(11)$\beta_2 > 0$ 情形相同。

当然，我们可以对式(41)做傅里叶变换，得到频域强度分布，见图(12)b 案例。

F. 时域光孤子

和式(31)对应，我们引入归一化时间和长度

$$\tilde{Z} = Z/L_{\mathrm{disp}}$$

$$\tau = T/t_0$$

$$\tilde{U} = \tilde{E}(Z,T)/|E_0|$$

且

$$N^2 = L_{\mathrm{disp}}/L_{\mathrm{SPM}}$$

即可重写式(35)

$$i\partial_{\tilde{Z}}\tilde{U} = \left(\mathrm{sign}(n_2)\frac{1}{2}\partial_\tau^2 + \mathrm{sign}(\beta_2)N^2|\tilde{U}|^2\right)\tilde{U} \tag{44}$$

我们已经知道，式(36)(44)相当于沿着 Z 轴传播的非线性薛定谔方程，β_2, n_2 的符号分别决定了群速色散和自相位调制的方向。如果 n_2, β_2 符号相同，那么由图(11)(12), 啁啾相同，互相增强，结果就是更大的啁啾，更快的脉冲扩散。

反过来，如果 n_2, β_2 符号相反，$n_2 > 0, \beta_2 < 0$ 亦或 $n_2 < 0, \beta_2 > 0$，那么群速色散和自相位调制可以互相平衡。事实上，式(44)和式(35)就没啥区别了。我们可以在

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{disp}} &= L_{\mathrm{SPM}}, \\
I_0 &= \frac{c|\beta_2|t_0^2}{\omega|n_2|}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

得到 $N = 1$ 孤子解:

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}(\tilde{Z}, \tau) &= \mathrm{sech}(\tau) e^{\frac{i}{2}\mathrm{sign}(\beta_2)\tilde{Z}}, \\
\tilde{E}(z, t) &= E_0 \mathrm{sech}((t - z/v_g)/t_0) e^{\frac{i}{2}\mathrm{sign}(\beta_2) z / L_{\mathrm{SPM}}}.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

1. 光纤光孤子

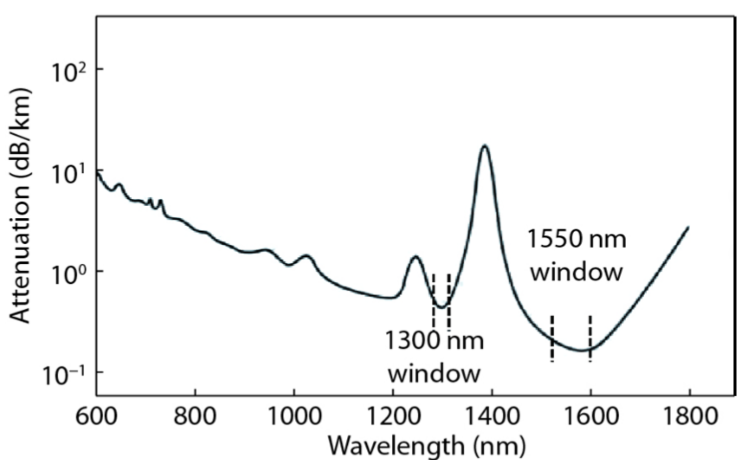


图 13. Telecom windows for fiber-optical communication (from online).

以上我们发现，时域光孤子的形成需要 $n_2\beta_2 < 0$，而对于一般介质，两者却都是正数。

对于 n_2 反号，基本上需要用到共振来让式(3)二能级贡献成为主导因素。问题是这么干常常还会导致吸收损耗。我们知道损耗基本上是不好的。

对于 β_2 的反号，一般来说，如果能找到比光学频率小的吸收带，那么由 Kramer-Kronigs 关系，相应的折射率贡献为负值，同时会贡献于负的 β_2。一个极端重要的场景是光纤通讯。如图(13)所示，石英光纤在红外的吸收存在两个透明窗口，分布位于 $\lambda = 1310$ nm, 1550 nm. 这两个透明窗口之间的吸收主要由石英中的羟基 OH 振动吸收导致。基于 2009 诺贝尔物理奖得主高锟上个世纪 60 年代的工作, 当代光纤通讯正是运用这两个透明窗口。由于 K-K 关系，这两个窗口的 $\beta_2 < 0$ 并不会让我们惊讶。也因此，光强超过一个阈值的短脉冲可以满足式(45), 形成光纤中传播的孤子。

由于孤子稳定及无展宽，光孤子通讯是一个非常诱人的技术话题。然而相关研究进展艰难，原因是石英玻璃的 n_2 有限，因此需要 I_0 较高，低功率光孤子是很难实现的。

此外，原则上来说，式(45)光孤子对光强的要求实际上是对孤子脉冲内光子数的要求。如果 n_2 足够大，那么孤子的光子数会变得越来越确定，这个就更加有意思，也更加困难了。以光孤子实现相干态光子的数分布压缩，是目前人类几乎没有办法实现的重要量子光学技术。

2. 人工色散补偿

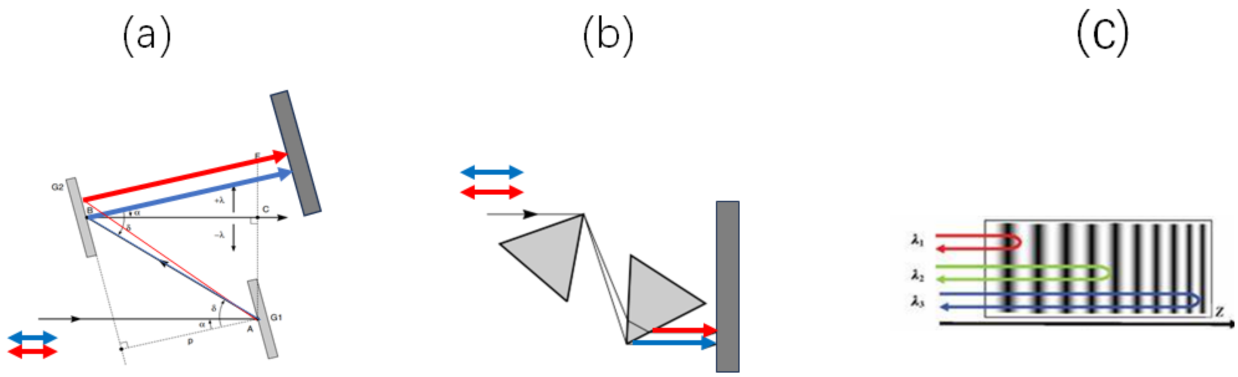


图 14. Dispersion compesntion with (a): Grating pair; (b) Prism pair; (c) Chirped Bragg mirror. Here $\bar{\beta}_{\mathrm{eff}}$ is negative for (a), positive for (c) (both from New Book). But for (b), $\bar{\beta}_{\mathrm{eff}}$ can be positive or negative, depending on how deep the light rays enter the prisms (from online).

对于 β_2 的反号，另一个重要方法是设计“反常色散”光学构型来抵消“正常色散”。见图(14)。我们可以引入等效群速色散系数

$$\bar{\beta}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\omega^2}$$

其中 L 为总光程。当然，实际上我们关心的是相位变化

$$\varphi(\omega, L) = \varphi(\omega, 0) + \frac{1}{2}\bar{\beta}_{\mathrm{eff}}L(\omega-\omega_0)^2$$

G. 被动锁模技术

1. 回顾：连续激光

我们回到图(7)a F-P 的输入输出关系。如图(15)a 所示，如果在腔内加入“增益介质”，那么式(20)中的复相移 $\delta = 2kL + i(\alpha - G)$ 可能出现负虚部，即光场在腔内传播，能量会指数增加。这些模式满足

$$\begin{aligned} n &\in \{n_G\}, \\ \omega_n &= n\omega_{\mathrm{FSR}} + \omega_{\mathrm{off}}, \\ G(\omega_n) &\geq \alpha(\omega_n) \end{aligned} \tag{47}$$

和此前定义一样，有自由光谱范围 $\omega_{\mathrm{FSR}} = 2c/L$。此外, 由于光场传播相位 $\phi = 2kL$ 受色散影响，不可能从光学波段到直流都是频率的线性函数，因此我们引入 ω_{off} 偏差。

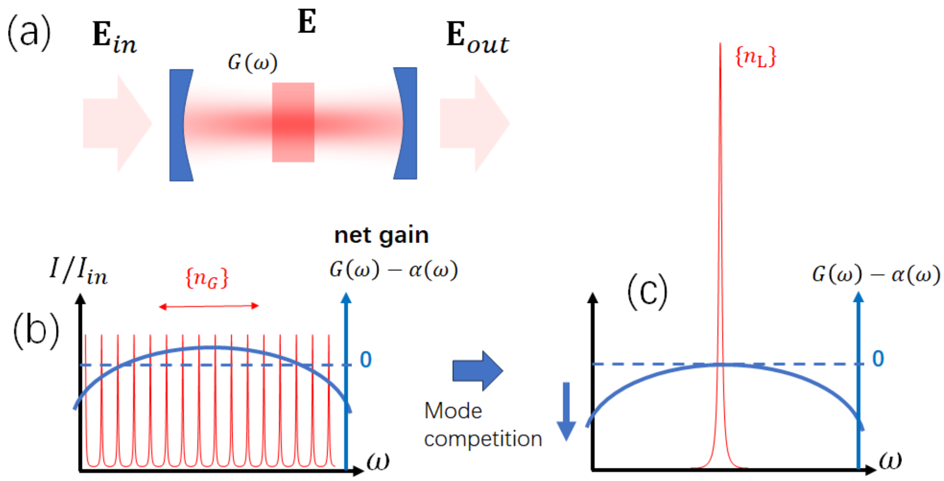


图 15. Generation of single-mode Continuous-Wave Laser.

现在我们考虑没有外场驱动，$\mathbf{E}_{\text{in}}=0$。任何涨落都会导致满足式(47)的模式光放大，指数增加，这个过程中的光场我们可以写一下

$$\mathbf{E}(t)=\mathbf{E}_0\sum_{n\in\{n_G\}}c_n(t)e^{-i\omega_n t}+c.c. \tag{48}$$

2. 模式竞争和单模输出

即使没有以下增益机制讨论，我们也容易了解，在腔内光被指数放大过程中，由于能量守恒，增益介质的增益能力 $G(\omega_n)$ 会下降（图(15)(b)）。最后只有单个模式或者少数几个模式 1“胜出”，形成 $G(\omega_n)=\alpha(\omega_n)$ 稳定输出。

$$\mathbf{E}_{\text{ss}}(t)=\mathbf{E}_0\sum_{n\in\{n_L\}}c_{n,\text{ss}}e^{-i\omega_n t}+c.c. \tag{49}$$

其中 $\{n_L\}\in\{n_G\}$ 是少数几个净增益 $G(\omega_n)-\alpha(\omega_n)$ 最大的模式。对于单模激光来说 $\{n_L\}$ 只有一个数，如图(15)(b) 所示。

3. 增益机制

1. OPO
2. Raman
3. Brillioun
4. Population-inversion

这里，常常是需要四能级，基态原子 $|g\rangle$ 被泵浦到基态态 $|e\rangle$, 后者弛豫到 $|m_e\rangle$ 态，和存在强偶极跃迁的亚稳基态 $|m_g\rangle$ 形成粒子数反转。我们考察共振极化率

$$\chi^{(1)}(\omega)=(\rho_{m_e}-\rho_{m_g})\frac{|\mathbf{d}_{m_e m_g}|^2}{-\tilde{\omega}_{m_e m_g}+\omega} \tag{50}$$

其中 $\tilde{\omega}_{m_e m_g} = \omega_{m_e m_g} - i\Gamma_{m_e}/2$，我们发现，

$$G(\omega) = -\mathrm{Im}\chi^{(1)}(\omega)2kL, \tag{51}$$

对于从激发态出发的极化率，有 $G(\omega) > 0$。

4. 被动锁模

锁模激光技术分主动锁模和被动锁模，这里介绍被动锁模。

我们回到式(47)，现在考虑腔内的损耗 α 不仅是频率的函数，还是光强的函数。例如，我们考虑一个端镜是由如图(8)a 的饱和吸收镜构成，那么如果光强“较弱”，腔内损耗会很大，如图(15)b 的所有模式都无法满足净增益为正的条件。但是如果不同模式的相位调整得当，可相干叠加形成高强度脉冲，抑制损耗，形成激光条件。

我们把腔内光场以光场模式展开，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t) &= \mathbf{E}_0 \sum_n c_n e^{-i\omega_n t} + c.c.\\ \mathbf{E}(\omega) &= \mathbf{E}_0 F(\omega) \sum_n \delta(\omega - \omega_n)\end{aligned} \tag{52}$$

其中频谱振幅 $F(\omega_n) = c_n$。将光场写回到时域。显而易见的是，由于光场由如式(47)的分立模式构成，因此必然存在和布洛赫能带类似的时域准周期性：

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(\omega - \omega_0)],\\ \mathbf{E}(t) &= \mathbf{E}_0 \sum_j f(t - jT_{\mathrm{rep}}) e^{-i\omega_0 t} + c.c.\end{aligned} \tag{53}$$

这里

$$T_{\mathrm{rep}} = 2\pi/\omega_{\mathrm{rep}}. \tag{54}$$

是脉冲的重复频率。

好了，我们现在在考察脉冲激光，因此需要重新定义一些名词：

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{rep}} &= \omega_{\mathrm{FSR}},\\ \omega_{\mathrm{cep}} &= \omega_{\mathrm{off}}.\end{aligned} \tag{55}$$

其中 ω_{rep} 是脉冲的重复圆频率，没啥问题。ω_{cep} 叫载波-包络频率，接下来会讨论。

我们考察 $F(\omega_n)$ 随 n 变化足够缓慢。最理想的情况，是 $F(\omega_n)$ 在增益曲线带宽 $\Delta\omega_G$ 内的相位不变（是为**锁模**）。那么 $f(t)$ 的时长就是

$$t_0 = \pi/\Delta\omega_G. \tag{56}$$

形成频谱变换极限脉冲。此时 $\mathbf{E}(t)$ 在时域形成以 $f_{\mathrm{rep}} = \omega_{\mathrm{FSR}}/2\pi$ 为重复频率的周期脉冲。对于平均功率一定激光来说，脉冲峰值功率 P_{peak} 有 T_{rep}/t_0 倍的增强，有希望形成足够强的瞬态光强，突破饱和吸收造成的损耗，实现净增益和激光振荡。

5. 饱和吸收镜被动锁模

在如图(8)a 的饱和吸收镜技术中，吸收损耗大致可以建模为：

$$\alpha(I) = e^{-\sigma k L/(1+\kappa I)} \tag{57}$$

其中 σ 是比较大的线性吸收。而 κI 导致饱和吸收效应，其中 $\kappa \sim \mathrm{Im}\chi^{(3)}$ 是“超快”吸收响应，在非线性带宽范围内应用于相同时间级别上的 $I(t)$ 变化。从上节课我们已经知道，饱和吸收的时间响应一般是比较慢的。但是在一些半导体材料中，弛豫可以非常快，达到 ps 级，因此图(8)a 中的饱和反射镜在超快技术中也是很有用的。

6. Kerr 透镜被动锁模

Kerr 效应可以完全远离共振。因此，Kerr 响应可以是超快的，完全由核外电子运动频率决定。如图(16)(a,b)。运用 Kerr 效应导致的自聚焦效应，很容易产生光强相关的腔内损耗 $\alpha(I)$。

图(16)(b) 实验可以稍微展开一下：

1) 激光增益介质：Yb:YAG

2) 导致自聚焦的 Kerr 介质: 还是 Yb:YAG

3) 腔内光强相关损耗: 见图(16)a

4) 群速色散补充：色散棱镜对。

7. 锁模激光脉冲是周期性孤子

1) 输出形式在时域上是如式(53)的周期函数，其中频谱变换极限包络函数 $f(t)$ 常常是如式(46)的孤子形式, $f(t) \approx \mathrm{sech}(t/t_0)$。

2) 稳定性：当腔内损耗和增益平衡，平均群速色散和自相位调制平衡后，被动锁模自发完成，频谱变换极限下的孤子脉冲自发产生。

3) 式(53)的频谱变换极限脉冲光周期输出，在频域上由 $\Delta\omega_G/\omega_{\mathrm{rep}}$ 个相位一致的激光模式相干叠加而成。由式(59)(60)可知，在时域和频域均称梳型，是为光梳。

H. 光梳的时空结构

就式(53)可以再稍作细致推导，考察

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \sum_j f(t - jT_{\mathrm{rep}}) e^{-i\omega_0 t} + c.c. \tag{58}$$

做傅里叶变换：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega) &= \mathbf{E}_0 \sum_j F(\omega - \omega_0) e^{-i(\omega-\omega_0) j T_{\mathrm{rep}}}, \\ &= \mathbf{E}_0 F(\omega - \omega_0) \sum_n \delta(\omega - \omega_0 - n\omega_{\mathrm{rep}}), \\ &= \mathbf{E}_0 F(\omega - \omega_0) \sum_n \delta(\omega - \omega_{\mathrm{cep}} - n\omega_{\mathrm{rep}}) \end{aligned} \tag{59}$$

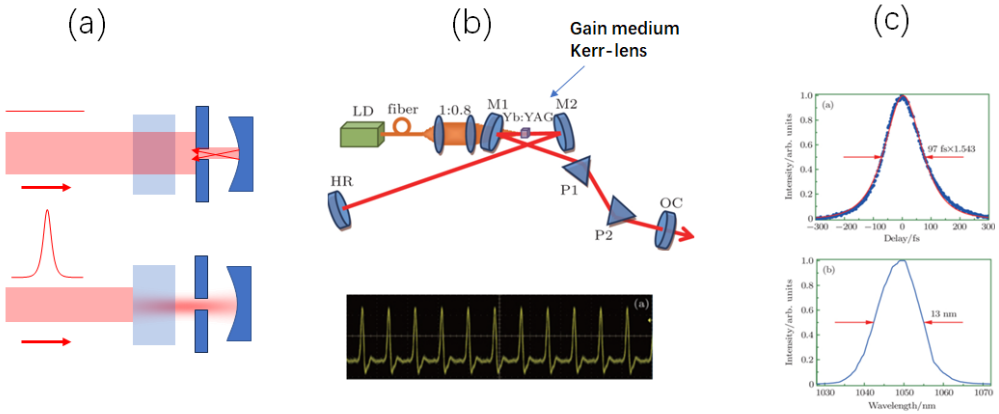


图 16. Kerr-Lens mode-locked laser example. (a): The setup (top) and fast-detector readout of the pulsed output(bottom). (b) Auto-correlation (top) and spectrum (bottom). From Gao et al, Chinese Physics B, 2016, 25(2): 024205.

其中 $\omega_{\text{rep}} = 2\pi/T_{\text{rep}}$。最后一行我们引入 $\omega_{\text{cep}} = \text{mod}(\omega_0, \omega_{\text{rep}})$。

写回到时域，

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \sum_j f(t - jT_{\text{rep}}) e^{-i\omega_0(t - jT_{\text{rep}})} e^{i\phi_{\text{cep},j}} + c.c. \tag{60}$$

其中 $\phi_{\text{cep},j} = -\omega_{\text{cep}} j T_{\text{rep}}$. 为啥 ϕ_{cep} 叫载波包络相位？$f(t)$ 是脉冲的包络函数，$e^{-i\omega_0 t}$ 是这个包络面的载波。这些术语是从光通讯领域过来的。ϕ_{cep} 决定了 $|f(t)|$ 在强度峰值的时候载波的相位。特别是对于飞秒级超短脉冲来说，ϕ_{cep} 决定性地影响到光脉冲瞬态电磁强度最大值的大小。举例来说，对于频谱变换极限下的对称脉冲, 取 $f(t)$ 为实数且 $f(t) = f(-t)$，那么 $\phi_{\text{cep}} = 0, \pi$ 对应脉冲取最大的峰值强度，而 $\phi_{\text{cep}} = \pm\pi/2$ 的时候，包络面最大的时候瞬时电场强度为零。

I. 超连续产生 (SCG)

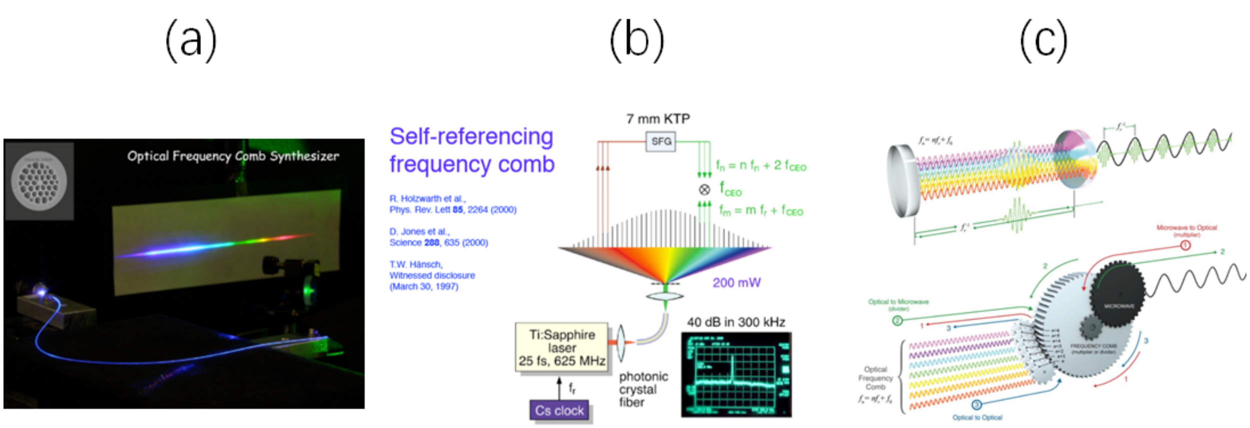


图 17. Kerr-Lens mode-locked laser example. (a): Super Continium Generation through a photoni-bandgap fiber. (b) $f - 2f$ locking of ϕ_{cep}. (c): Frequency comb as a time-frequency ruler. (Figs from online)

如图(17)a, 把锁模激光脉冲输入到石英光纤等结构，一定条件下，光场的频谱会出现“超级展宽”

$$F(\omega-\omega_0)e^{-i(\omega-\omega_0)jT_{\text{rep}}} \rightarrow F_{\text{SCG}}(\omega-\omega_0)e^{-i(\omega-\omega_0)jT_{\text{rep}}}. \tag{61}$$

这个展宽当然包括式(41), 图(12)描述的自相位调制。然而对于超短的强脉冲，频谱展宽常常还包括下节课将介绍的布里渊散射，拉曼散射，及高阶非线性过程，形成频谱超级展宽，常覆盖整个可见光波段，成为白光。如图(17)b, 这么复杂的频率展宽过程，竟然可以精确保持由式(61)蕴含的频率等间隔性(式(62))，是令人震撼的。物理上，这个相干性由超连续产生机制保证：在下一个脉冲来临前，介质激发弛豫到初态，因此每个脉冲经历了完全相同的超连续过程。

J. 光梳的 CEP 锁定和精密频率计量

以式(55), 再写一遍光频梳的频率分量

$$\omega_n = n\omega_{\text{rep}} + \omega_{\text{cep}} \tag{62}$$

对于如 YAG, 钛宝石等具有宽谱杂质能级的增益介质，$\Delta\omega_G/\omega_{\text{rep}} \sim 10^6$，模式众多，均满足式(62)。此外，我们还可以把 ω_{cep} 锁定，通常方法是如图(17)b 的 $f-2f$ 干涉方法（对光梳倍频后和自己干涉）。确定了 ω_{cep} 后, 频率梳直接将 MHz 级 ω_{rep} 和 100THz 级光学频率 ω_0 联系起来，在基础物理，工程物理中的应用极端重要。因为此类发明，德国马普量光所得 Ted Hansch, 美国科罗拉都大学的 John Hall 获得 2005 年诺贝尔物理奖 (同年获奖的还有量子光学奠基科学家，美国哈佛大学的 Roy Glauber)。而由式(60)，ω_{cep} 的确定使得每个脉冲的载波相位和包络面之间的关系完全可控，特别是当 $\omega_{\text{cep}} = \omega_{\text{rep}}/N$ 时，锁模激光输出成为在 ω_{rep}/N 频率上的周期函数。这种 CEP 可控性是一大类强场光物理的技术关键，包括阿秒激光技术 (2023 年诺贝尔物理奖, 德国马普量光所的 Ferenc Krausz, 美国俄亥俄州立大学的 Pierre Agostini，及瑞典 Lund 大学的 Anne L'Huillier)。

================================

第四次作业第一部分

1) 请结合图(6), 推导折射率光栅的空间分布及图中公式，进而证明对于 Kerr 介质，不存在简并二波混频。

2) 考察图(4)，令信号光 $\tilde{\mathbf{E}}_p = e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}/|\mathbf{r}-\mathbf{R}|$ 为 $\mathbf{R}$ 处发出的球面波。请以光栅图像，综合分析光学共轭波前是否真的就是 $\tilde{\mathbf{E}}_p^*$，还是有些细节上的差别。(提示：设样品宽度为 L, 考察 $R \gg L$ 平面波近似, 及 $R \sim L$ 大角度照明两种情况)

3) 还是考察图(4)，这次是简单的平面波情形，但是考察 $\omega_p = \omega + \delta$ 和 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ 存在频率差。请推导 $\tilde{E}_p^*$ 光学共轭光束的频率，并给出光栅衍射的图像化解释。

4) 请运用式(26)定性解释：光从空气掠入射玻璃板，反射率在小角度极限下趋于 1。

5) 请结合课堂讲解内容，补充条件，详细推导泵浦光作用下四能级体系的式(50)极化率。

III. 光折变效应

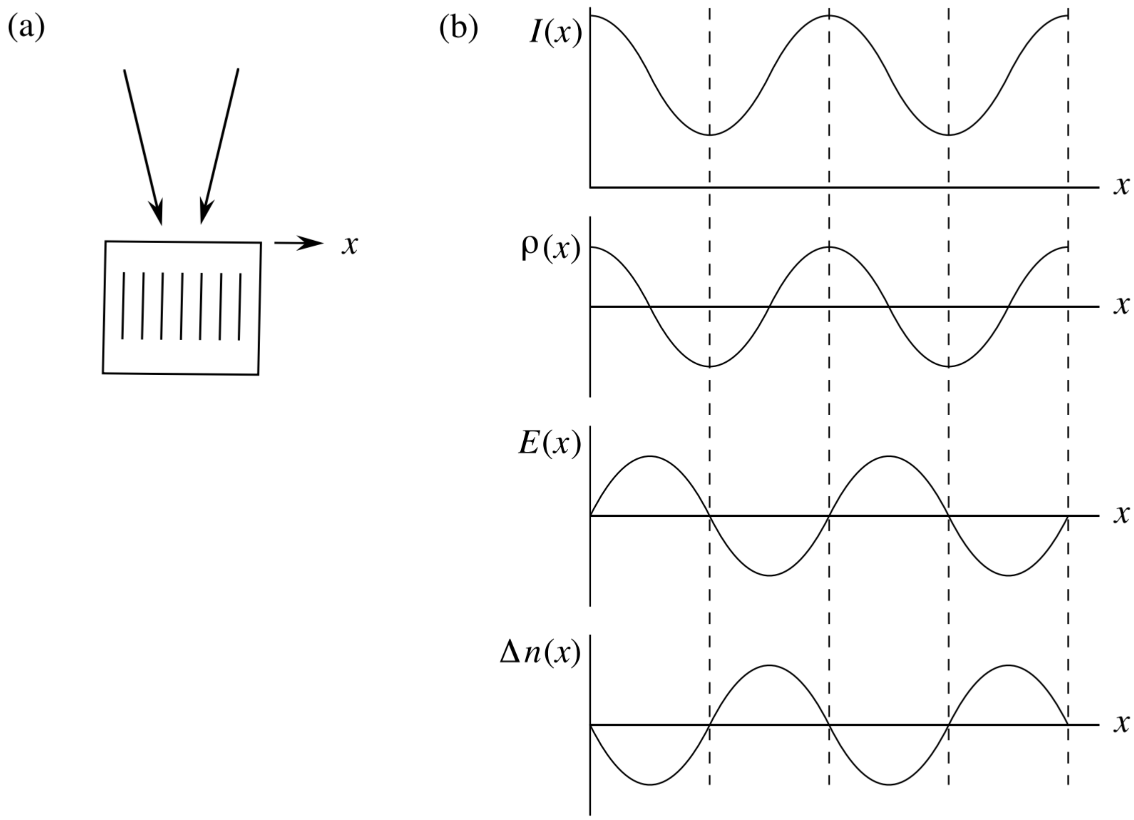


图 18. Photon-refractive effect, from Boyd book