

## 开放系统量子力学的基本方法

吴赛骏\*

复旦大学物理系, 上海 200433, 中国。

本文档随教学进程跟新。

从正则量子化开始, 本课程对量子力学体系的描述均是基于哈密顿量, 无论是薛定谔, 海森堡, 或者某种相互作用表象, 量子体系的演化均由哈密顿量产生。这样的描述方式对哈密顿量提出了如下要求:

1)  $H(p, q)$  包含体系所有自由度。证明方法: 反证法。

2) 哈密顿量”几乎一定是“厄密的,  $H^\dagger(p, q) = H(p, q)$ 。证明方法: 能量是可观测量, 因此  $H = \sum_n E_n |n\rangle\langle n|$  中的  $E_n$  必须是实数。

由于  $H(p, q)$  包含体系所有的自由度, 这样的体系必然是孤立体系, 或者是整个宇宙。本节课我们当然不考虑后者, 而前者一个最大的问题, 是这样的体系必然是无法观测的。

然而此前我们还是引入了光场的测量理论。在如 L4,  $\delta P^{(n)}$  的测量理论中, 我们取了”无限小微扰“的极限, 即探测器的截面如此之小, 以至于其存在对光场量子态没有影响。已经提到, 这样的假设本身可能有一些毛病, 探测器必然由可以和光相互作用的物质构成, 因此无穷小的光子探测器是难以存在的。事实上, 光探测物理牵涉到量子态的坍缩和经典电流的产生, 其细致过程是一个悬而未决的物理难题, 有待发展。有趣的是, 如果我们沿用哥本哈根的量子态坍缩图像, 而不追究”量子态是怎么坍缩的“, 那么我们 L4-6 介绍的光探测图像是自洽的。

接下来, 我们的讨论并没有限于”无穷小探测器“, 而是考虑大面积的探测器阵列。这样的探测器当然会影响光场的分布。我们的解决方案是仅考虑脉冲光场, 其模式函数有  $f(t - z/c)$  这样的包络函数, 如果探测器仅存在于  $z = 0$  平面, 则  $t < 0$  时脉冲光场不会受到探测器存在的影响。而在  $t > 0$  时刻我们放弃了对被测光场的哈密顿量描述方法, 仅关心光子计数的统计规律。

部分避免上述困难的有力工具是引入”开放系统“的量子力学。具体来说, 可将宇宙分为我们关心的系统  $S$  及其环境  $R$ 。其中  $R$  是”reservoir“, 又叫热库。原因是我们假设环境处于热态。在本课程中, 对于可见光波段的电磁环境, 一个非常实用的近似是将  $R$  设为真空态。进一步, 由于热库的自由度多, 能谱宽, 能级连续, 在一定条件下其与  $S$  耦合反作用于  $S$  本身几乎是即时反馈, 没有记忆, 这一 Markovian 近似允许我们在  $R + S$  的薛定谔方程或者海森堡方程中, 将系统-热库-系统的“自作用”小心积分, 获得系统密度矩阵  $\rho_S$  的“主方程”, 或者系统力学量  $O_S$  的海森堡-朗之万方程, 实现开放系统的量子力学描述。我们将发现, 真空环境的存在常归结为对系统变量随机涨落和耗散的驱动。和经典花粉粒子在溶液中的布朗运动一样, 系统量子力学变量在环境中的耗散和随机涨落幅度均决定于环境的热力学性质。

本节课介绍开放量子力学系统的基本方法。如图 (1) 所示, 我们将以“局域光场”和“二能级原子”为例, 介绍系统和环境耦合的动力学。这两个案例的物理实质互通。为揭示相关联系, 本讲义将在重要概念和方法上形成必要重复。

在下节课, 我们将对主方程方法再做审视, 将等效光子探测引入 Markovian 环境, 形成随机波函数方法。为了准备这个讨论, 在本节课的第三小节, 我们将给出自发辐射光子的波函数。

\* saijunwu@fudan.edu.cn

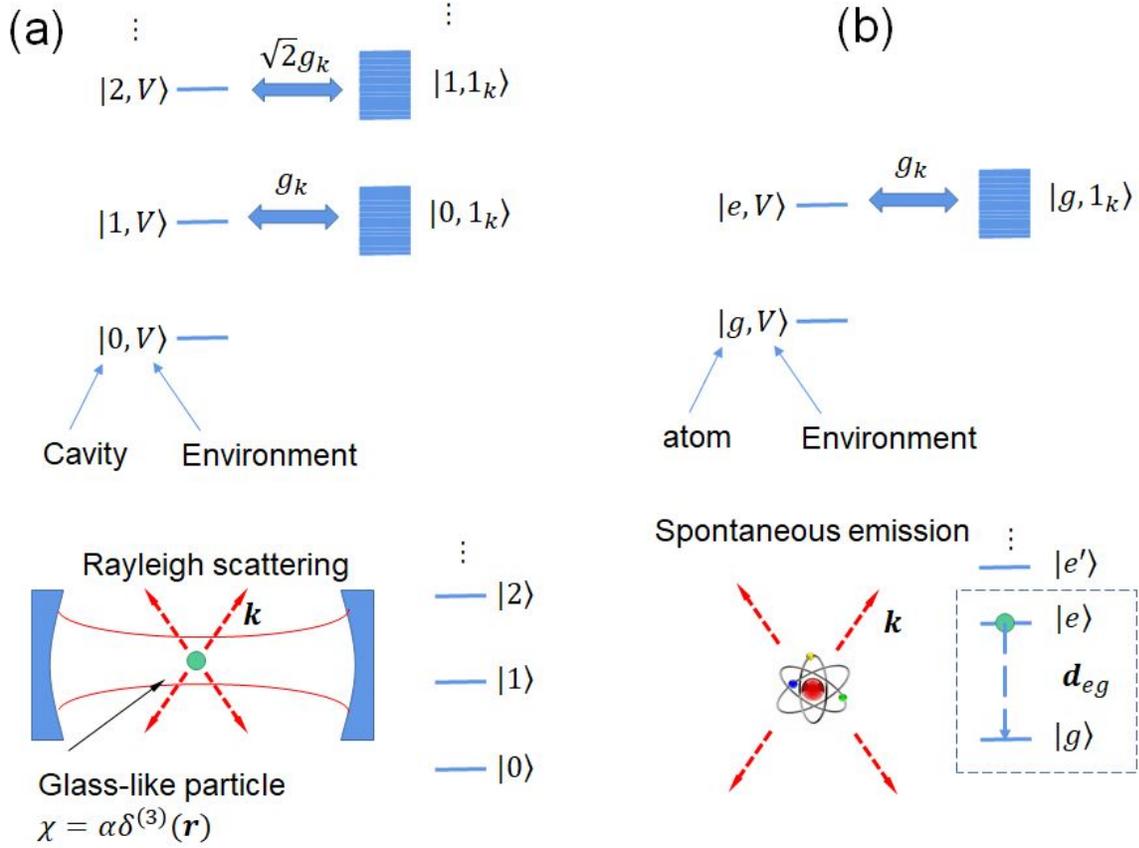


图 1. Decay of cavity (a) and atom (b) open to a vacuum environment.

## I. 作为开放系统的光学腔场

首先考察一个“线性光学开放系统”。我们已经知道，单模光学腔和谐振子同构。因此，如图 (1a) 所示，光学腔模式的“漏光动力学”就是系统谐振子和环境谐振子的耦合。以下以光学腔的“漏光动力学”为例，在海森堡图像下推导局域光场升降算符的海森堡-朗之万方程。然后切换到薛定谔图像，推导光场密度矩阵的主方程。在推导过程中，我们将强调 Markovian 近似条件，涨落和耗散现象的内禀联系，以及等效哈密顿量的概念。

### A. 双光学腔的耦合

作为开放系统推导的准备，先介绍耦合双光学腔系统的特征。

考虑“完美”光学腔模式  $\mathcal{E}_{1,2}$ ，频率为  $\omega_{1,2}$ ，相应光场产生和湮灭算符为  $a_{1,2}$ ， $a_{1,2}^\dagger$ 。现考虑两个光学腔在空间交叉如图 (2)，在交叉区间  $\mathbf{r} = 0$  有点状经典可极化粒子，极化率为  $\alpha$ 。我们忽略其他模式，光学系统的哈密顿量可以写为：

$$H = \hbar(\omega_1 + g_{11})a_1^\dagger a_1 + \hbar(\omega_2 + g_{22})a_2^\dagger a_2 + \hbar(g_{12}a_1^\dagger a_2 + g_{21}a_2^\dagger a_1). \quad (1)$$

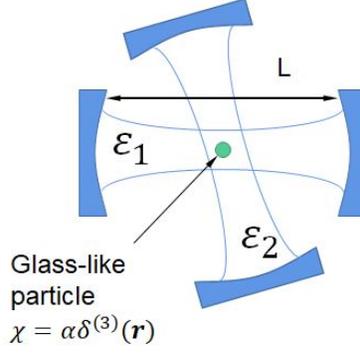


图 2. Double cavity.

这儿  $g_{ij} = -\frac{1}{\hbar}\alpha\mathcal{E}_i^*(0)\mathcal{E}_j(0)$  是耦合系数。

我们将粒子造成的频率移动  $g_{jj}$  吸收进入  $\omega_j$ , 并简化记  $g_{12} = g$ , 因此有:

$$H = \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 + \hbar g a_1^\dagger a_2 + h.c.$$

我们可以写出海森堡方程:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 &= \omega_1 a_1 + g a_2, \\ i\dot{a}_2 &= \omega_2 a_2 + g^* a_1. \end{aligned} \quad (2)$$

我们当然可以做变量代换  $a_j = \tilde{a}_j e^{-i\omega_j t}$  (并且简化记号  $\tilde{a} \rightarrow a$ ), 得

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 &= g e^{i\Delta t} a_2, \\ i\dot{a}_2 &= g^* e^{-i\Delta t} a_1. \end{aligned} \quad (3)$$

这儿  $\Delta = \omega_1 - \omega_2$  是两个光学腔的失谐量。

注意, 从式 (2) 到式 (3) 可以认为是做了相互作用图像的酉变化, 获得  $H_I = \hbar g e^{i\Delta t} a_1^\dagger a_2 + h.c.$ , 然后写出该哈密顿量产生的海森堡演化方程。

式 (3) 算符方程和二能级系统的演化方程同构, 计算结果上完全平行, 以下我们考虑两种情况:

### 1. 共振耦合

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \cos(gt)a_1(0) - i\sin(gt)a_2(0) \\ a_2(t) &= -i\sin(gt)a_1(0) + \cos(gt)a_2(0) \end{aligned} \quad (4)$$

回到海森堡图像:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \cos(gt)a_1(0)e^{-i\omega_1 t} - i\sin(gt)a_2(0)e^{-i\omega_2 t} \\ a_2(t) &= -i\sin(gt)a_1(0)e^{-i\omega_1 t} + \cos(gt)a_2(0)e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \quad (5)$$

因此,  $t$  时刻和 0 时刻的场算符的线性变换和  $r = i\sin(gt)$ ,  $t = \cos(gt)$  的“分束器”是一样的。我们在 L5-6 线性量子光学的技术都可以应用。例如

1) 可以将  $|\psi(0)\rangle = f(a_1^\dagger(0), a_2^\dagger(0))|V\rangle$  表示为

$$|\psi(0)\rangle = f\left(\cos(gt)a_1^\dagger(t) - i\sin(gt)a_2^\dagger(t), \cos(gt)a_2^\dagger(t) - i\sin(gt)a_1^\dagger(t)\right)|V\rangle$$

用来分析  $t$  时刻的光场性质。

2) 可以将  $t$  时刻满足特定性质的量子光场  $|\psi\rangle = g(a_1^\dagger(t), a_2^\dagger(t))|V\rangle$  表示为

$$|\psi(0)\rangle = g\left(\cos(gt)a_1^\dagger(0) + i\sin(gt)a_2^\dagger(0), \cos(gt)a_2^\dagger(0) + i\sin(gt)a_1^\dagger(0)\right)|V\rangle$$

只有这样产生的  $|\psi(0)\rangle$  才会满足  $t$  时刻的量子性质。

注意，海森堡图像下的算符期待值一定要这样写起：

$$\langle O(t) \rangle = \langle \psi(0) | O(t) | \psi(0) \rangle$$

2. 我们考察两个例子 (PS1)

1)  $|\psi(0)\rangle = |\alpha, 0\rangle$ , 计算  $\Delta n_2(t)$

2)  $|\psi(0)\rangle = |n, 0\rangle$ , 计算  $t$  时刻的光子分布函数  $f(n_1(t))$ 。

3. 失谐耦合

失谐耦合的严格计算当然也不难，只需要将式 (3) 做酉变换，写出  $i\dot{a} = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}a$  的形式，并运用 Pauli 矩阵的性质。这儿不做重复。

我们考虑一个特殊情况， $\mathcal{E}_1$  模式是我们关心的“系统”，而  $\mathcal{E}_2$  模式是我们并不特别关心的“环境”模式。为了保证该环境模式的影响很小，我们考虑一个远失谐的情况： $|\Delta| \gg |g|$ 。我们先对式 (2) 的第二式积分，得：

$$a_2(t) = a_2(0) - ig^* \int_0^t e^{-i\Delta\tau} a_1(\tau) d\tau \quad (6)$$

考虑到  $|\Delta| \gg |g|$  这个条件，我们分部积分：

$$a_2(t) = a_2(0) + \frac{1}{\Delta}(g^* e^{-i\Delta t} a_1(t) - g^* a_1(0)) + i \int_0^t \frac{|g|^2}{\Delta} a_2(\tau) d\tau \quad (7)$$

上述分部积分，在我们考虑腔场耦合系数  $g(0) = 0$  缓慢增加到  $g(t) = g$  的“绝热”过程中也是适用的，我们可以简化：

$$a_2(t) = a_2(0) + \frac{g^*}{\Delta} e^{-i\Delta t} a_1(t) + i \int_0^t \frac{|g|^2}{\Delta} a_2(\tau) d\tau \quad (8)$$

我们发现在远失谐的情况下， $a_2(t)$  的含时部分很大程度上“绝热跟随”当前的  $a_1(t)$ ，带入到式 (2) 的第一行 (写回海森堡图像)，有

$$i\dot{a}_1 = (\omega_1 + \frac{|g|^2}{\Delta})a_1 + \hat{f}(t) + O\left(\frac{|g|^2}{\Delta} a_2(\tau < t)\right) \quad (9)$$

其中  $\hat{f}(t) = ge^{i\Delta t} a_2(0)$  是  $\mathcal{E}_2$  “环境光场”提供的驱动力。式 (9) 是说， $a_1$  在  $a_2$  耦合下的动力学由耦合移动 (第一项第二部分)，环境驱动 (第二项)，及历史效应 (第三项) 决定。

4. 局域光场的等效哈密顿量

在式 (4) 中，如果我们忽略  $O(|g|^2/|\Delta|^2)$  级别的“历史项”，则光场模式  $\mathcal{E}_1$  的动力学可近似由等效哈密顿量描述：

$$H_{\text{eff}} = \hbar(\omega_1 + \frac{|g|^2}{\Delta})a_1^\dagger a_1 + \hbar\hat{f}^\dagger(t)a_1 + h.c. \quad (10)$$

注意含时驱动力  $\hat{f}(t) = ge^{i\Delta t}a_2(0)$  本身的演化是决定性的，并非动力学变量。

对于  $\mathcal{E}_2$  模式处于相干态  $|\beta\rangle$ ，而我们关心的动力学变量是  $a_1, a_1^\dagger$  的线性函数时，由于  $\langle\hat{f}\rangle = ge^{i\Delta t}\beta$ ，形成对  $\mathcal{E}_1$  模式的相干驱动，式 (10) 的应用变得特别简单。

$$H_{\text{eff}} \approx \hbar(\omega_1 + \frac{|g|^2}{\Delta})a_1^\dagger a_1 + \hbar g^* e^{-i\Delta t} \beta^* a_1 + h.c. \quad (11)$$

### 5. Markovian 近似-I

对式 (9) 历史项的忽略，导致我们可以写出式 (10) 的含时哈密顿量，以及演化规律完全由当前状态决定的方程

$$i\dot{a}_1 \approx (\omega_1 + \frac{|g|^2}{\Delta})a_1 + \hat{f}(t) \quad (12)$$

这样的近似，和生物学领域著名的 Markovian 近似类似，因此也被称为 Markovian 近似。在这个双腔耦合案例中，Markovian 近似条件是基于弱耦合， $|g| \ll |\Delta|$ ，因此  $\mathcal{E}_2$  模式收集到的耦合动力学历史信息相对次要 – 然而在这个例子中，环境  $\mathcal{E}_2$  模式的记忆力是无穷长的，可想而知，Markovian 近似对特定观察量的计算不见得合理。更加常见和合理的 Markovian 近似条件见如下讨论。

### B. 光学腔场的海森堡-朗之万方程

在以上图 (2) 案例中，式 (1) 哈密顿量忽略了真空中其他模式  $\mathcal{E}_k$  的存在。这样的忽视有一定的合理性：我们定义

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\hbar} \alpha \mathcal{E}_1^*(0) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(0), \\ &= \frac{1}{\hbar} \alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_1}{2\varepsilon_0 L w^2} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 V}} \end{aligned} \quad (13)$$

由于单光子电场  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2\varepsilon_0 V} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ，因此我们显然有  $g_{1,2} \gg g_{\mathbf{k}}$ 。事实上，由于自由空间量子化体积  $V$  无穷大，因此耦合系数趋于零。

然而我们不要忘记  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  耦合虽然微弱，但是模式众多，其实并不能简单忽略。事实上，式 (1) 成立的条件是双腔强耦合， $|g| \gg \kappa_{1,2}$ ，以及短时间  $t \ll 1/\kappa_{1,2}$ 。这里  $\kappa_{1,2}$  是局域光场  $\mathcal{E}_{1,2}$  的漏光率。本节我们回到图 (1a) 的单模光场，推导局域光场的海森堡-朗之万方程，获得漏光率。

#### 1. 系统-热库的海森堡方程

首先，和式 (1) 类似，我们可以写出图 (1a) 对应的哈密顿量

$$H = \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar (g_{\mathbf{k}} a_1^\dagger a_{\mathbf{k}} + h.c.) \quad (14)$$

有和式 (3) 类似的绘景变换，我们可以得到：

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 &= \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\Delta_{\mathbf{k}} t} a_{\mathbf{k}}, \\ i\dot{a}_{\mathbf{k}} &= g_{\mathbf{k}}^* e^{-i\Delta_{\mathbf{k}} t} a_1. \end{aligned} \quad (15)$$

这儿  $\Delta_{\mathbf{k}} = \omega_1 - \omega_{\mathbf{k}}$  是自由场模式  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  相对光学腔模式的失谐量。

## 2. Wigner-Weisskopf 步骤-I

因为  $\Delta_{\mathbf{k}}$  可以取任意值，我们当然无法由类似式 (9) 分部积分的方法化简式 (15)，只能硬着头皮算一下第二式：

$$a_{\mathbf{k}}(t) = a_{\mathbf{k}}(0) - ig_{\mathbf{k}}^* \int_0^t e^{-i\Delta_{\mathbf{k}} \tau} a_1(\tau) d\tau.$$

带入到第一式，得到一个含时的算符积分微分方程

$$i\dot{a}_1(t) = \hat{F}(t) - i \int_0^t K(t - \tau) a_1(\tau) d\tau \quad (16)$$

其中

$$\hat{F}(t) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\Delta_{\mathbf{k}} t} a_{\mathbf{k}}(0). \quad (17)$$

是环境模式对系统的驱动项（常称为涨落力），而积分核

$$K(t) = \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\Delta_{\mathbf{k}} t} \quad (18)$$

决定了系统在开放环境下的动力学性质。

我们对  $\sum_{\mathbf{k}}$  求和连续化（姑且忽略偏振指标  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$  求和），可以化简  $K(t)$ ，

$$\begin{aligned} K(t) &= \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\Delta_{\mathbf{k}} t} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\Delta_{\mathbf{k}} t} \\ &= \frac{V}{8\pi^3} \int d^2 \Omega \int_0^\infty k^2 \alpha^2 \mathcal{E}_1^{*2}(0) \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 V} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_1)t} \frac{dk}{d\omega_{\mathbf{k}}} d\omega_{\mathbf{k}} \\ &\propto \int_0^\infty \omega_{\mathbf{k}}^3 e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_1)t} d\omega_{\mathbf{k}} = \int_{-\omega_1}^\infty (\omega_1^3 - 3\omega_1^2 \Delta_{\mathbf{k}} + \dots) e^{i\Delta_{\mathbf{k}} t} d(-\Delta_{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (19)$$

式 (19) 的中间一行  $d^2 \Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  是立体角微元。注意光子的色散关系  $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$ 。

式 (19) 的最后一行，如果我们只取  $\omega_1^3$  项，并且 somehow  $\omega_1 \rightarrow \infty$ ，那么我们就得到  $K(t) \propto \delta(t)$ 。实际上， $K(t) \approx \delta(t)$  泛函近似并不需要严格满足上述假设：既然  $K(t - \tau)$  在式 (16) 中的运用是一个积分核，其是否可以作为一个  $\delta(t - \tau)$  函数，取决于被积函数  $a(\tau)$  的动力学特征。这儿，如果我们仅关心  $\delta t \gg \xi/\omega_1$  的动力学 ( $\xi \gg 1$ )，那么等效的有  $K(t)$  是  $\delta(t)$  及其系列微分的和，而  $|t| \gg \xi/\omega_1$  时  $K(t) = 0$ 。

## 3. 光学腔模的海森伯-朗之万方程

我们因此可以重写式 (16) (Markovian 近似)

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1(t) &= \hat{F}(t) - ia(t) \int_0^t K(t - \tau) d\tau \\ &= -i\frac{\kappa}{2} a_1(t) + \delta_L a_1(t) + \hat{F}(t) \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) 的第二行即是单模腔场的海森堡-朗之万方程。接下来我们分别考察耗散系数  $\kappa$ , 频率移动  $\delta_L$ , 以及由式 (17) 定义的环境驱动及涨落力  $\hat{F}(t)$ 。

#### 4. 腔衰减率 $\kappa$ 和 "Lamb" 频移 $\delta_L$

$\kappa/2$  及  $\delta_L$  分别是积分  $I = \int_0^t K(t - \tau)d\tau$  的实部和虚部。 $I$  的积分方法如下, 首先作变量代换  $d\tau \rightarrow d(\tau - t)$ , 然后由式 (19) 的讨论, 我们将积分限改变一下,  $\int_{-t}^0 \rightarrow \int_{-\infty}^0$ , 因此有

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 \frac{1}{-i\Delta_{\mathbf{k}} + 0^+} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (\pi\delta(\Delta_{\mathbf{k}}) + iP\frac{1}{\Delta_{\mathbf{k}}}) |g_{\mathbf{k}}|^2 \end{aligned} \quad (21)$$

注意, 上式的推导我们用了两个规整无穷积分的技巧

1) 在  $\int_{-\infty}^0 e^{-i\Delta_{\mathbf{k}}t} dt$  中, 我们对  $\Delta_{\mathbf{k}}$  引入了一个无穷小的正虚部,  $\Delta_{\mathbf{k}} \rightarrow \Delta_{\mathbf{k}} + i0^+$ , 这样的旋转允许积分在  $t < 0$  收敛, 其意义和我们推导式 (5) 的 "绝热" 近似类似。

2) 我们运用了泛函公式:

$$\frac{1}{x - i0^+} = i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x} \quad (22)$$

这个公式是复分析留数定理的体现。具体来说, 当我们对函数  $f(x)/x$  沿着实轴作积分的时候, 可以在  $x = 0$  的奇点附近作小圆围道积分, 并取围道半径趋于零极限。这个计算过程非常方便的被式 (22) 涵盖。其中  $\delta(x)$  是狄拉克函数, 其积分用法大家都很熟悉。而  $P\frac{1}{x}$  是主值积分的意思:

$$\int_{-|a|}^{|b|} dx P\frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-|a|}^{-\varepsilon} dx + \int_{\varepsilon}^{|b|} dx \quad (23)$$

#### 5. 费米黄金规则-I

回到式 (21), 我们有,  $I = \kappa/2 + i\delta_L$ ,

$$\begin{aligned} \kappa &= 2\pi \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 \delta(\omega_1 - \omega_{\mathbf{k}}) \\ \delta_L &= \sum_{\mathbf{k}} P\frac{|g_{\mathbf{k}}|^2}{\omega_1 - \omega_{\mathbf{k}}} \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) 的物理意义非常明确:  $\kappa$  是散射粒子导致的  $\mathcal{E}_1$  腔场衰减率, 其表达式即是接下来我们要详细介绍的 "费米黄金规则"; 而  $\delta_L$  是该连续态耦合导致的 "Lamb" 移动。

#### 6. $\kappa$ 和 $\delta_L$ 的表达式

$\kappa$  和  $\delta_L$  的计算需要对自由光场模式求和连续化,  $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow V/(2\pi)^3 \int d^3k$  (我们姑且忽略偏振自由度):

$$\begin{aligned}
\kappa &= 2\pi \frac{V}{8\pi^3} 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha^2 |\mathcal{E}_1(0)|^2}{\hbar^2} \frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V} k^2 \frac{dk}{d\omega_k} \delta(\Delta_k) d\omega_k, \\
&= \frac{\alpha^2 |\mathcal{E}_1(0)|^2 \omega_1^3}{2\pi c^3 \hbar \varepsilon_0} = \frac{\alpha |\mathcal{E}_1(0)|^2}{2\pi \hbar} \frac{\alpha k_1^3}{\varepsilon_0} \\
&= \frac{\alpha^2 \omega_1^4}{4\pi \varepsilon_0^2 c^3} |f_1(0)|^2
\end{aligned} \tag{25}$$

以及

$$\begin{aligned}
\delta_L &= \frac{V}{8\pi^3} 4\pi P \int_0^\infty \frac{\alpha^2 |\mathcal{E}_1(0)|^2}{\hbar^2 \Delta_k} \frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V} k^2 \frac{dk}{d\omega_k} d\omega_k \\
&= \frac{\alpha^2 |\mathcal{E}_1(0)|^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 c^3 \hbar} P \int_0^\infty \frac{\omega_k^3}{\omega_1 - \omega_k} d\omega_k \\
&= \frac{\alpha^2 \omega_1}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 c^3} |f_1(0)|^2 P \int_0^\infty \frac{\omega_k^3}{\omega_1 - \omega_k} d\omega_k
\end{aligned} \tag{26}$$

其中  $f_1(\mathbf{r}) \sim \sqrt{\frac{1}{w^2 L}} \cos(k_1 z) e^{-(x^2+y^2)/w^2}$  是光学腔场的归一化模式函数。式 (25) 给出了漏光率和波长的关系： $\kappa \propto 1/\lambda_1^4$ ，并不令人惊讶：漏光率和瑞丽散射截面  $\alpha^2 k_1^4$  成正比。

注意上述推导中均假设  $\xi/\omega_1$  是最短的时间尺度，这个假设必须和我们的推导结果自洽（弱耦合条件）：

$$\begin{aligned}
\kappa &\ll \omega_1 \\
\frac{\alpha^2 \omega_1^3}{4\pi \varepsilon_0^2 c^3} |f_1(0)|^2 &\ll 1
\end{aligned} \tag{27}$$

如果弱耦合条件被破坏，那么我们将发现在 Markovian 近似框架下， $a(t)$  的变化速度超过  $\xi/\omega_1$ ，形成矛盾。

## 7. 涨落力 $\hat{F}(t)$

我们考察环境光场处于真空态  $|V\rangle$ ，那么式 (17)(20) 中的涨落力项  $\hat{F}(t)$  有如下性质：

$$\begin{aligned}
\langle \hat{F}(t) \rangle &= 0, \\
\langle \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}(t') \rangle &= 0 \\
\langle \hat{F}(t) \hat{F}^\dagger(t') \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\Delta_{\mathbf{k}}(t-t')} = K(t-t') \\
&\rightarrow \kappa \delta(t-t')
\end{aligned} \tag{28}$$

式 (28) 的最后一行  $\delta(t)$  函数近似是在式 (20) Markovian 近似下的自洽表达，仅当我们关心的动力学过程时间尺度  $\delta t \gg \xi/\omega_1$  才成立。

式 (28) 可以推广到有限温度的热库 ( $\beta = 1/k_B T$ ):

$$\begin{aligned}
\langle \hat{F}(t) \rangle &= 0, \\
\langle \hat{F}^\dagger(t) \hat{F}(t') \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \bar{n}_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\Delta_{\mathbf{k}}(t-t')} \rightarrow \bar{n}(\omega_1) \kappa \delta(t-t'), \\
\langle \hat{F}(t) \hat{F}^\dagger(t') \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} (\bar{n}_{\mathbf{k}} + 1) |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\Delta_{\mathbf{k}}(t-t')} \rightarrow (\bar{n}(\omega_1) + 1) \kappa \delta(t-t').
\end{aligned} \tag{29}$$

这儿  $\bar{n}(\omega_1) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_1}-1}$  是环境中的共振热光子数。

事实上，在任何环境下，Markovian 近似的涨落力算符均有如下互易关系，

$$[\hat{F}(t), \hat{F}^\dagger(t')] \rightarrow \kappa\delta(t-t') \quad (30)$$

其系数刚好也是  $\kappa$ ，如此才能保证接下来要介绍的  $[a(t), a^\dagger(t)] = 1$ 。

### 8. $a(t)$ 的表达式

我们对海森堡-朗之万方程积分

$$a(t) = a_1(0)e^{-\frac{\kappa}{2}t} - i \int_0^t \hat{F}(\tau)e^{\frac{\kappa}{2}(\tau-t)} d\tau \quad (31)$$

注意，随着时间的演化，局域光场算符逐渐被环境光场算符  $a_k(0)$  取代。由式 (30)，可以验证：

$$[a(t), a^\dagger(t)] = 1 \quad (32)$$

注意，式 (20) 中如果我们忽略  $\hat{F}(t)$ ，那么会得到  $[a_1(t), a_1^\dagger(t)] = e^{-\kappa t}$  的错误结论，算符的互易关系随时间变化，这是不可接受的。

### 9. 相干态的激发和衰退

对式 (31) 的应用，我们举两个最简单的例子。

1) 系统初态是  $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$ ，环境是真空态  $|V\rangle$ ，那么有

$$\langle a(t) \rangle = \alpha_0 e^{-i\omega_1 t - \frac{\kappa}{2}t} \quad (33)$$

注意，这里和式 (14) 对应，我们将  $a(t)$  写回到海森堡表象， $a(t) \rightarrow a(t)e^{-i\omega_1 t}$ ，因此  $a(t)$  正比于强场的含时振幅正频分量  $\langle E^{(+)}(t) \rangle$ 。

2) 系统初态是  $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ ，环境是位移真空态  $|\beta_d\rangle$ ，其中  $\mathcal{E}_d$  是一个聚焦到点状粒子的高斯光场模式，有，

$$\langle a(t) \rangle = 0 - i \int_0^t g_d \beta_d e^{i\Delta_d \tau} e^{\frac{\kappa}{2}(\tau-t)} d\tau$$

这儿  $g_d = -\frac{1}{\hbar} \alpha \mathcal{E}_1^*(0) \mathcal{E}_d(0)$  是耦合系数， $\Delta_d = \omega_1 - \omega_d$  是相干驱动的失谐量。我们有

$$\langle a(t) \rangle = \frac{\alpha \mathcal{E}_1^*(0) \mathcal{E}_d(0) \beta_d}{\hbar(\Delta_d - i\kappa/2)} (e^{-i\omega_d t} - e^{-i\omega_1 t - \frac{\kappa}{2}t}) \quad (34)$$

再次注意，这里和式 (14) 对应，我们将  $a(t)$  写回到海森堡表象， $a(t) \rightarrow a(t)e^{-i\omega_1 t}$ ，因此  $\langle a(t) \rangle \mathcal{E}_1(0)$  给出含时振幅正频分量  $\langle E^{(+)}(0, t) \rangle$ 。

如图 (3a) 所示，相干态的衰减导致魏格纳函数分布逐渐跌落到真空态 - 这个过程叫“Ring-down”。

如图 (3b) 所示，初始为真空态的光场在外界相干驱动下，会逐渐走向稳态。注意如下受迫振动的一般特点：

1) 光场频率跟随驱动光:  $\omega = \omega_d$ 。

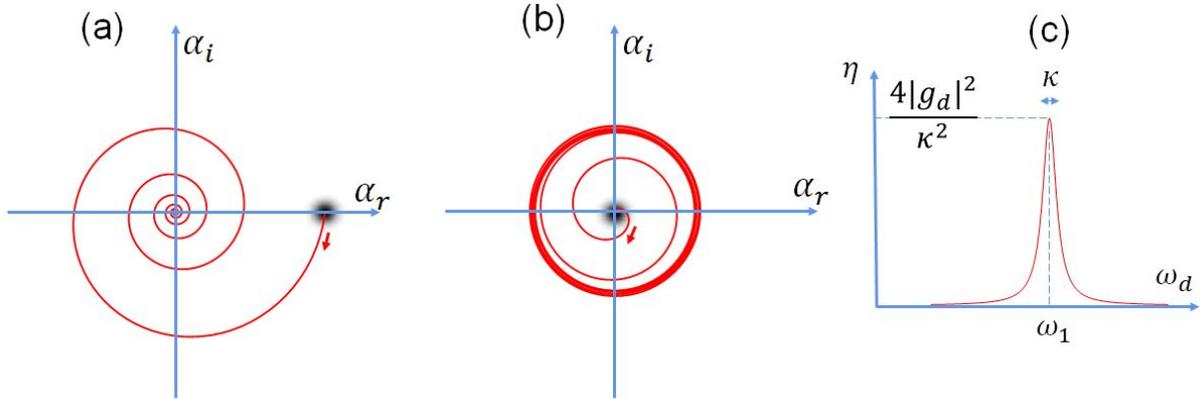


图 3. (a) Decay of a coherent state inside the leaky cavity. (b) Driving up a coherent state. (c) The "responsivity" of the perfect-cavity+scatterer system under the external drive.

2) 我们考察腔场和驱动场和在散射粒子处的场强比例，复响应系数  $r = \frac{\alpha|\mathcal{E}_1(0)|^2}{\Delta_d - i\kappa/2}$ ；  
 在  $\omega_d \ll \omega_1$  的时候是正实数；  
 在  $\omega_d \gg \omega_1$  的时候是负实数；  
 在  $\omega_d = \omega_1$  共振的时候是正虚数。

此外，我们有光学腔对外界驱动的洛伦兹型"响应能力"(图 (3c))

$$\eta = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\alpha^2 |\mathcal{E}_1(0)|^4}{\Delta_d^2 + \kappa^2/4} \quad (35)$$

#### 10. 光学腔模式的 $Q$ 值和精细度 $\mathcal{F}$

现在我们的光学腔模式  $\mathcal{E}_1$  有了两个频率尺度：(重整化后的) 本征频率  $\omega_1$ ，以及衰减率  $\kappa$ 。我们可以定义光学腔模式的  $Q$  值：

$$Q = \omega_1/\kappa \quad (36)$$

$Q$  值给出了光学腔的"记忆力"：平均来说，光子可以在局域光场中以光学频率  $\omega_1$  振荡  $Q$  次才离开。

此外，我们可以再写式 (25)，

$$\kappa = \frac{c}{2L} \frac{\alpha^2 k_1^4}{2\pi \varepsilon_0^2 w^2}$$

或者说

$$\kappa = 2\pi f_{\text{FSR}}/\mathcal{F} \quad (37)$$

其中  $f_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L}$  是腔场的"自由光谱范围"，而  $\mathcal{F} = 1/\mathcal{L}_1$  是腔场单次透过散射粒子的能量损失概率  $\mathcal{L}_1 = \frac{\alpha^2 k_1^4}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 w^2}$  的倒数，称为为腔场模式的"精细度"。

最后，我们对式 (37) 做推广，考虑腔场的"漏光"并非由瑞丽散射造成，而是由如图 (4) 的腔镜透射导致，因此有  $\mathcal{L}_1 = T_1 + T_2$ ，以及  $\kappa = \frac{c}{2L}(T_1 + T_2)$ 。

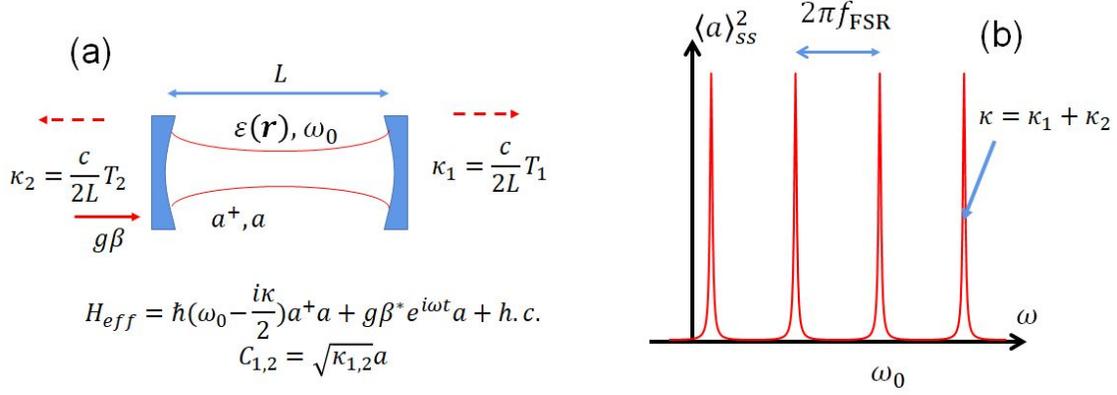


图 4. (a) A more traditional cavity damping picture, where the cavity field leaks through the side-mirrors. We also consider a coherent field drives the cavity from the left side. (b) Excitation spectrum of the cavity field.

### 11. 马尔可夫近似条件-I

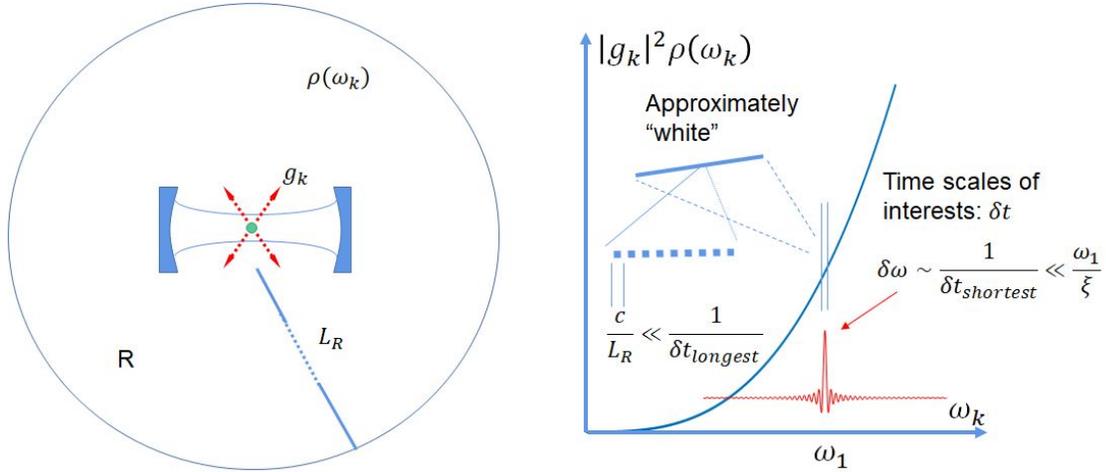


图 5. Markovian approximation relies on the white spectrum condition  $\delta t \gg \xi/\omega_1$  and the continuum condition  $\delta t \ll L_R/c$ . Here the density of state  $\rho(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$ .

如图 (5) 所示, 式 (19) 的推导预示在我们关心的时间尺度

$$\begin{aligned} \delta t &\ll L_R/c \\ \delta t &\gg \xi/\omega_1 \end{aligned} \quad (38)$$

下,  $K(t) \rightarrow \kappa \delta(t)$ , 不仅迫使被积函数  $a_1(\tau)$  取当前值 (式 (20)), 也保证式 (28)(30) 涨落力  $\hat{F}(t)$  的时间演化完全随机, 没有记忆。此外, 为确保式 (38) 和推导结果不自相矛盾, 我们还要求弱耦合条件  $\kappa \ll \omega_1$  (式 (27))。

式 (38) 的时间尺度要求是开放系统 Markovian 近似的标准条件, 其中  $L_R/c$  时间尺度决定了热库的能谱密度, 只有当  $\delta t \ll L_R/c$ , 自由光场才能被认为是连续化的, 我们才可以作  $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow V/(2\pi)^3 \int d^3k$

的变换。另一方面， $\delta t \gg \xi/\omega_1$  确保了在我们关心的时间尺度  $\delta t$  下，在相应的能量范围  $1/\delta t$  内积分核  $K(t)$  中  $\sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\Delta_{\mathbf{k}}t} \sim \int d\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^3 e^{i\Delta_{\mathbf{k}}t}$  的频率求和范围是”平谱”，由  $\omega_1^3$  决定，因此才有等效的  $\delta(t)$  函数。

式 (38) 中的任何一个条件被破坏，Markovian 近似都不再成立。

1) 如果我们考察的时间  $\delta t \sim \xi/\omega_1$ ，会发生什么？量子芝诺效应。

2) 开放系统的“环境”尺度  $L$  可以取得巨大。然而如果环境本身也是封闭的，例如，可以考虑图 (5a) 的环境光场本身处在一个“反射球”内，而球体半径是  $L$ ，辐射到这样的环境中的光子会有一些概率在  $2L/c$  时间后返回，并再次和系统相互作用。因此，当  $\delta t \sim L/c$  时，Markovian 近似就不再成立。此时怎么办？一般来说，如非精确调节反射，反射光子和系统再次耦合的强度常常很低，可以忽略。然而如果不可忽略，可以将这个反射球环境计入为”二级系统“，形成”系统”-”二级系统”-”真正环境热库”的相互作用。这个方法常常被称为二阶 Markovian 近似。

## 12. 涨落-耗散定理

式 (20) 中  $\kappa$  代表耗散，而  $\hat{F}(t)$  的相关性质由式 (28)(29) 给出，其中的关键系数也是  $\kappa$ 。两者的联系从我们式 (19) 推导过程可以看出。

一般来说，简单哈密顿体系不存在耗散和涨落，简单开放系统的耗散和涨落都是源于和环境热库的耦合，其强度存在内禀联系。首先揭示这个内禀联系的人是爱因斯坦。

我们定义光场的正交坐标  $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(t) + a^\dagger(t))$ ，重写式 (16)

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\kappa}{2}x + \hat{F}_x(t)$$

其中  $\hat{F}_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2i}}(\hat{F}(t) - \hat{F}^\dagger(t))$  == 注意我们可以重新定义随机力  $\hat{F} \rightarrow i\hat{F}$  的相位，将  $x$  力写出更加合理的形式:  $\hat{F}_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{F}(t) + \hat{F}^\dagger(t))$ ，那么，自然有

$$\frac{dx^2}{dt} = -\kappa x^2 + 2x\hat{F}_x(t)$$

将  $x(t) = x(0)e^{-\kappa t/2} + \int_0^t \hat{F}_x(\tau)e^{\kappa(\tau-t)/2}d\tau$  带入，得：

$$\frac{dx^2}{dt} = -\kappa x^2 + 2x(0)e^{-\kappa t/2}\hat{F}_x(t) + 2\int_0^t \hat{F}_x(\tau)\hat{F}_x(t)e^{\kappa(\tau-t)/2}d\tau$$

我们对上式取热库平均，运用式 (29) 及系统算符  $x(0)$  和热库无关联，得：

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} &= -\kappa\langle x^2 \rangle + 2\int_0^t \langle \hat{F}_x(\tau)\hat{F}_x(t) \rangle e^{\kappa(\tau-t)/2}d\tau \\ &= -\kappa\langle x^2 \rangle + D \end{aligned} \quad (39)$$

其中有扩散系数可以运用式 (29) 来计算：

$$\begin{aligned} D &= \int_0^t \langle \hat{F}(\tau)\hat{F}^\dagger(t) + \hat{F}^\dagger(\tau)\hat{F}(t) \rangle d\tau \\ &= \frac{2\bar{n}(\omega_1) + 1}{2}\kappa \end{aligned} \quad (40)$$

式 (39) 说明，涨落力  $\hat{F}_x$  的关联强度  $D$  即  $\langle x^2 \rangle$  的扩散系数，而式 (40) 说明涨落强度  $D$  必然和耗散系数  $\kappa$  成正比，比例由环境温度决定 – 这个开放系统的一般结论被称为涨落-耗散定理。

注意式 (39) 的稳态解:

$$\langle x^2 \rangle^{SS} = \frac{2\bar{n}(\omega_1) + 1}{2} \quad (41)$$

显而易见的是  $\langle x \rangle^{SS} = 0$ , 因此上式正是热平衡下单模光场正交分量  $x$  的分布宽度。上述推导和 Einstein 及 Langevin 对布朗运动的计算一一对应。

### C. 开放腔场的主方程

以上海森堡绘景下的海森堡-朗之万方程形成了开放系统的完备描述。然而和封闭系统一样, 我们常常发现薛定谔图像在”状态描述”上更加方便。接下来我们推导开放光学腔场的量子态运动方程, 步骤和海森堡图像一一对应。

我们还是考虑图 (1a) 的局域光场系统及相应哈密顿量式 (14), 作相互作用表象变换:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\Delta_{\mathbf{k}}t} a_1^\dagger a_{\mathbf{k}} + h.c. \quad (42)$$

我们首先考虑系统的初态是 Fock 态  $|n\rangle$ , 由于散射耦合, 预期含时演化的系统波函数为:

$$|\psi(t)\rangle = c_n(t)|n, 0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t)|n-1, \mathbf{1}_{\mathbf{k}}\rangle \quad (43)$$

注意, 这儿原则上我们还可以包括  $|n-2, \mathbf{1}_{\mathbf{k}}, \mathbf{1}_{\mathbf{k}'}\rangle$  等基矢。不包括这些基矢是微扰论的考虑, 使得计算大大简化, 其精确性需经过最终结果自洽性的验证 (最终我们需要式 (27)  $\kappa \ll \omega_1$ , 否则此处微扰展开就并不成立)。

接下来我们从薛定谔方程

$$i\partial_t |\psi\rangle = \left( \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\Delta_{\mathbf{k}}t} a_1^\dagger a_{\mathbf{k}} + h.c. \right) |\psi\rangle \quad (44)$$

左乘  $\langle n, 0|, \langle n-1, \mathbf{1}_{\mathbf{k}}|$ , 可得到 (参见图 (1a))

$$\begin{aligned} i\dot{c}_n &= \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{n} g_{\mathbf{k}} e^{i\Delta_{\mathbf{k}}t} c_{\mathbf{k}} \\ i\dot{c}_{\mathbf{k}} &= \sqrt{n} g_{\mathbf{k}}^* e^{-i\Delta_{\mathbf{k}}t} c_n \end{aligned} \quad (45)$$

#### 1. Wigner-Weisskopf 步骤 - II

式 (45) 和式 (15) 一一对应, 不同的是这儿我们仅仅是一个代数微分方程, 运用初条件  $c_n(0) = 1, c_{\mathbf{k}}(0) = 0$ , 解法简单得多, 我们有

$$c_{\mathbf{k}}(t) = -i \int_0^t \sqrt{n} g_{\mathbf{k}}^* e^{-i\Delta_{\mathbf{k}}\tau} c_n(\tau) d\tau \quad (46)$$

带入到第一式, 有

$$\begin{aligned} i\dot{c}_n &= -i \int_0^t \sum_{\mathbf{k}} n |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\Delta_{\mathbf{k}}(t-\tau)} c_n(\tau) d\tau \\ &= -i \int_0^t n K(t-\tau) c_n(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (47)$$

其中  $K(t)$  由式 (19) 定义, 因此在 Markovian 近似下, 我们有

$$\begin{aligned}
i\dot{c}_n &= n(-i\kappa/2 + \delta_L)c_n, \\
i\dot{c}_k &= \sqrt{n}g_k^* e^{-i\Delta_k t} c_n
\end{aligned} \tag{48}$$

其中  $\kappa, \delta_L$  仍然由式 (24) 给出。

## 2. 联合量子态演化

我们考虑演化时间为  $\delta t$ , 将式 (48) 用量子态微分的形式重写一下:

$$\begin{aligned}
i\delta|\psi\rangle &= \left( (\delta_L - i\kappa/2)a_1^\dagger a_1 \delta t + \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^* \frac{e^{-i\Delta_{\mathbf{k}}\delta t} - 1}{\Delta_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_1 \right) |\psi\rangle \\
-i\delta\langle\psi| &= \langle\psi| \left( (\delta_L + i\kappa/2)a_1^\dagger a_1 \delta t + \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\Delta_{\mathbf{k}}\delta t} - 1}{\Delta_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}} a_1^\dagger \right)
\end{aligned} \tag{49}$$

## 3. 非厄密有效哈密顿量, 量子坍缩算符, 主方程

因为我们只关心系统, 对环境热库并不关心, 因此, 按照 L1, 可以对式 (49) 部分求迹,

$$\delta\rho(t) = \text{trace}_R((\delta|\psi\rangle)\langle\psi|) + \text{trace}_R(|\psi\rangle(\delta\langle\psi|)) + \text{trace}_R(\delta|\psi\rangle(\delta\langle\psi|))$$

由  $\frac{\delta\rho}{\delta t} = \dot{\rho}$  获得

$$\rho(t) = \text{trace}_R(|\psi\rangle\langle\psi|)$$

的运动方程:

$$i\hbar\dot{\rho} = H_{\text{eff}}\rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger + i\hbar C\rho C^\dagger \tag{50}$$

式 (50) 是光场模式密度矩阵  $\rho(t)$  的主方程。其中

$$\begin{aligned}
C &= \sqrt{\kappa}a_1 \\
H_{\text{eff}} &= H_0 - i\hbar C^\dagger C/2
\end{aligned} \tag{51}$$

其中  $H_0 = \hbar(\omega_1 + \delta_L)a_1^\dagger a_1$ ,  $C$  称作量子坍缩算符。注意  $H_{\text{eff}}$  是非厄密哈密顿量,  $H_{\text{eff}}^\dagger \neq H_{\text{eff}}$ 。其中反厄密项  $-i\frac{\kappa}{2}a_1^\dagger a_1$  引起系统存在概率的衰减, 并由“回收项”  $C\rho C^\dagger$  抵消。具体来说, 我们很容易验证:

$$\text{trace}(\dot{\rho}) = -\frac{\kappa}{2}\text{trace}(a_1^\dagger a_1 \rho - \rho a_1^\dagger a_1 + 2a_1 \rho a_1^\dagger) = 0$$

## 4. 费米黄金规则-II

注意, 在式 (50) 的推导中, 我们运用了如下近似:

$$\sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 \left| \frac{e^{i\Delta_{\mathbf{k}}\delta t} - 1}{\Delta_{\mathbf{k}}} \right|^2 = \kappa\delta t \tag{52}$$

这是因为，在  $\delta t \gg \xi/\omega_1$  条件下，对  $\sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 s_{\mathbf{k}}(\delta t)$  求和时，我们等效的有

$$s_{\mathbf{k}}(\delta t) = \left| \frac{e^{i\Delta_{\mathbf{k}}\delta t} - 1}{\Delta_{\mathbf{k}}} \right|^2 \approx 2\pi\delta(\Delta_{\mathbf{k}})\delta t \quad (53)$$

如图 (5)，该近似正是 Markovian 近似的体现。

### 5. 密度矩阵的演化案例

在没有外界驱动的情况下，系统密度矩阵的演化很简单，我们可以直接在 Fock 态表象下展开密度矩阵元：

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{mn} &= \langle m | \dot{\rho} | n \rangle \\ &= \langle m | -\frac{\kappa}{2} a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a \frac{\kappa}{2} | n \rangle + \langle m | \kappa a \rho a^\dagger | n \rangle \\ &= -\frac{\kappa}{2} (m+n) \rho_{mn} + \sqrt{(m+1)(n+1)} \kappa \rho_{m+1, n+1} \end{aligned} \quad (54)$$

我们发现：

$$\rho(t \rightarrow \infty) = |0\rangle\langle 0| \quad (55)$$

此外，对于相干初态： $\rho(0) = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$ ，可以证明， $\rho(t) = |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$ ， $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\kappa t/2}$ 。具体来说，验证  $\rho(t) = |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$  是主方程的解如下：等式左边

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= (\dot{\alpha} \partial_\alpha + \dot{\alpha}^* \partial_{\alpha^*}) |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)| \\ &= -\frac{\kappa}{2} (\alpha \partial_\alpha + \alpha^* \partial_{\alpha^*}) \rho(t) \end{aligned} \quad (56)$$

等式右边：

$$-\frac{\kappa}{2} a^\dagger a \rho(t) - \frac{\kappa}{2} \rho(t) a^\dagger a + \kappa a \rho a^\dagger = -\frac{\kappa}{2} (\alpha a^\dagger \rho(t) + \alpha^* \rho(t) a - 2|\alpha|^2 \rho(t)) \quad (57)$$

并注意到

$$a^\dagger |\alpha\rangle\langle\alpha| = (\alpha^* + \partial_\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| a = (\alpha + \partial_{\alpha^*}) |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

因此有左右相等。 $\rho(t) = |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$  相干态解和图 (3a) 一致：

## II. 二能级原子的自发辐射

在以线性光学系统案例的充分准备后，我们再讨论一个看似更加简单的问题：二能级原子的自发辐射（图 (1b)）。在这个经典案例中，我们将在薛定谔图像下重复历史上 Wigner-Weisskopf 对自发辐射率及辐射频移（Lamb 移动）的推导过程，讨论费米黄金规则，并再次回顾 Markovian 近似条件，及给出主方程。

### A. 二能级及旋转波近似

不同于图 (1a) 中的光学腔场等间距能级, 在图 (1b) 中的原子能级间隔高度不均, 其根本原因, 是原子内态运动由电荷间库伦势决定, 远非简谐势场。我们首先在自由场和原子能量表象下写出完备的哈密顿量:

$$H = \hbar \sum_{e,g} (\omega_e |e\rangle\langle e| + \omega_g |g\rangle\langle g|) + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \quad (58)$$

这儿  $e, g$  是所有电偶极跃迁允许的基态-激发态组合,

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + h.c.$$

$$\mathbf{d} = \sum_{e,g} |e\rangle\langle g| \mathbf{d}_{eg} + h.c.$$

在相互作用表象下有

$$H = \hbar \sum_{e,g,\mathbf{k}} (\mathcal{E}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + h.c.) (\mathbf{d}_{eg} |e\rangle\langle g| e^{i\omega_{eg} t} + h.c.) \quad (59)$$

接下来我们考虑特定二能级系统  $|g\rangle, |e\rangle$ ,  $|\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}}| \ll |\omega_{eg} + \omega_{\mathbf{k}}|$ , 忽略高频振荡项 (旋转波近似), 有

$$H = \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\Delta_{\mathbf{k}} t} a_{\mathbf{k}} |e\rangle\langle g| + h.c. \quad (60)$$

其中  $g_{\mathbf{k}} = \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(0) \cdot \mathbf{d}_{eg}}{\hbar}$  是  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  模式驱动二能级跃迁的单光子拉比频率, 而  $\Delta_{\mathbf{k}} = \omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}}$  是光场相对于二能级跃迁的失谐量。

### B. 联合系统薛定谔方程

如图 (1b), 我们考察原子最初处于激发态, 环境是真空态, 因此大系统的波函数可以写为:

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t) |e, V\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) |g, 1_{\mathbf{k}}\rangle \quad (61)$$

带入到薛定谔方程, 有

$$\begin{aligned} i\dot{c}_e &= \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\Delta_{\mathbf{k}} t} c_{\mathbf{k}} \\ i\dot{c}_{\mathbf{k}} &= g_{\mathbf{k}}^* e^{-i\Delta_{\mathbf{k}} t} c_e \end{aligned} \quad (62)$$

这个方程和上面式 (48) 非常像了。

### C. 费米黄金规则-III

此前我们已经在光学腔动力学中进行了两次束缚态-连续态耦合方程的推导 (式 (16)(48)), 此类耦合方程的非微扰推导首先由 Victor Weisskopf 在 Eugene Wigner 的帮助下给出, 运用场景正是激发态原子的自发辐射。在这儿我们换一下顺序, 先给一个自发辐射的微扰推导。

所谓微扰近似，是基于  $c_e(0) = 1$ ，对于足够短的  $T = \delta t$ ，有  $c(T) \approx 1$ ，我们因此可以直接对式 (72) 积分：

$$c_{\mathbf{k}}(T) = -i \int_0^T g_{\mathbf{k}}^* e^{-i\Delta_{\mathbf{k}}t} dt = g_{\mathbf{k}}^* \frac{e^{-i\Delta_{\mathbf{k}}T} - 1}{\Delta_{\mathbf{k}}} \quad (63)$$

计算跃迁概率：

$$|c_{\mathbf{k}}(T)|^2 = 2\pi |g_{\mathbf{k}}|^2 T \delta_T(\Delta_{\mathbf{k}}) \quad (64)$$

其中

$$\delta_T(\Delta) = \frac{\sin^2 \Delta T/2}{\pi \Delta^2 T/2} \quad (65)$$

对于  $T \gg \frac{\xi}{\omega_{eg}}$  的时间尺度，我们可以近似  $\delta_T(\Delta) \rightarrow \delta(\Delta)$ 。我们因此在初始时刻，有

$$\frac{d|c_e|^2}{dT} = - \sum_{\mathbf{k}} \frac{d|c_{\mathbf{k}}|^2}{dT} = -\Gamma \quad (66)$$

其中自发辐射率由费米黄金规则给出：

$$\Gamma = \sum_{\mathbf{k}} 2\pi |g_{\mathbf{k}}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{eg}) \quad (67)$$

具体计算方法和式 (25) 一样：

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} |d_{eg}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{eg}) \\ &= \frac{4\pi\hbar}{\hbar^2 8\pi^3 2\epsilon_0} \int_0^\infty k^2 \frac{dk}{d\omega} d\omega \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{eg}) \\ &= \frac{\omega_{eg}^3 |d_{eg}|^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar c^3} \rightarrow \frac{\omega_{eg}^3 |d_{eg}|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}, \\ &< \alpha_{\text{fine}}^3 \omega_{eg} \end{aligned} \quad (68)$$

最后倒数第二行计入了电偶极相互作用的矢量性及光子的偏振。最后一行以氢原子 Lyman-alpha  $2P \rightarrow 1S$  跃迁为案例， $\alpha_{\text{fine}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$  是精细结构常数。

注意  $\Gamma_e$  和跃迁矩阵元  $\mathbf{d}_{eg}$  的平方，和跃迁频率  $\omega_{eg}$  的三次方成正比。其中  $\omega_{eg}^2$  来自态密度， $\omega_{eg}$  来自单光子电场强度。

该结果的自洽性同时要求弱耦合条件：

$$\begin{aligned} \Gamma &\ll \omega_{eg} \\ \frac{\omega_{eg}^2 |d_{eg}|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} &\sim \alpha_{\text{fine}}^3 \ll 1 \end{aligned} \quad (69)$$

由于  $\alpha_{\text{fine}} \approx 1/137$  足够小，电偶极相互作用充分的满足弱耦合条件。

### 1. 从初始自发辐射到自发辐射

基于微扰计算，式 (67) 只是说，原子的初始自发辐射率是  $\Gamma$ ，这个初始时间  $T = \delta t$  需要足够短，满足  $c_e(T) \approx 1$ ，又需要足够长， $T \gg \xi/\omega_1$ ，因此可以运用  $\delta_T(\Delta) \rightarrow \delta(\Delta)$ 。这事实上和 Markovian 近

似条件一致，我们关心的特征时间尺度  $\delta t \gg \xi/\omega_1$ ，而在  $1/\delta t$  频率尺度上，耦合强度  $|g_k|^2 \rho(\omega)$  是“平谱”即可 (图 (5b))。

从初始辐射率到辐射率，我们只需要保证自发辐射的光子永远不回来。如此，则在接下来的时间内，我们总可以在任意  $|c_e|^2 < 1$  值上继续作微扰，并等效的认为环境初态仍然是真空，即可得到

$$\frac{d|c_e|^2}{dt} = -\Gamma|c_e|^2 \quad (70)$$

注意这一个推导，同时要求了  $T \ll L_R/c$ ，即保证光子不会再回来。这个也和图 (5) 的 Markovian 近似条件一致。

#### D. 激发态寿命和原子自然线宽

式 (68) 给出了二能级原子激发态的辐射率  $\Gamma_{e \rightarrow g}$ 。

对于多能级原子来说，该公式有显然的基于费米黄金规则的推广：

$$\Gamma_e = \sum_g \Gamma_{e \rightarrow g}$$

我们自然有激发态的“辐射寿命”

$$\tau_e = 1/\Gamma_e$$

对于稳定的基态  $|g\rangle$  和激发态构成的光学跃迁，该激发态寿命决定了跃迁的自然线宽 (另见式 (83)):

$$\Delta\omega_{ge} = \Gamma_e$$

下面我们举例

##### 1. 低轨道电偶极跃迁

氢原子 Lyman-alpha

$$\Gamma_{2P-1S} = 2\pi \times 99.6 \text{ MHz}$$

氢原子 Lyman-beta

$$\Gamma_{3P-1S} = 2\pi \times 26.6 \text{ MHz}$$

氢原子 Balmer-Alpha

$$\Gamma_{3P-2S} = 2\pi \times 3.6 \text{ MHz}$$

铯原子 D2 线

$$\Gamma_{6P_{3/2}-6S_{1/2}} = 2\pi \times 5.2 \text{ MHz}$$

自发辐射率的测量方法：时域瞬态荧光法

自发辐射率的测量方法：频域光谱法

## 2. 里德堡原子

我们考虑“圆轨道”里德堡态,  $|e\rangle = |n, l = n - 1, m = l\rangle$ ,  $n \gg 1$ 。由于电偶极选择定则  $\Delta l = \pm 1$ ,  $\Delta m = 0, \pm 1$ , 这样的高激发态在电偶极近似下仅能跃迁到  $|g\rangle = |n - 1, l = n - 2, m = l\rangle$  态, 跃迁频率

$$\omega_n \sim -RC\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}\right) \propto 1/n^3$$

跃迁矩阵元

$$d_n \sim n^2 e a_{\text{Bohr}}$$

因此我们可以估计:

$$\Gamma_n \approx \Gamma_{2P}/(n/2)^5$$

其中  $\Gamma_{2P}$  是氢原子 2P 能级的线宽。

我们取  $n = 50$ , 有  $\Gamma_{20} \approx (15 \text{ ms})^{-1}$ 。

## 3. 超精细能级

$\omega_{eg}$  在 GHz 级,  $d_{eg} \rightarrow \mu_{eg}$  磁偶极跃迁,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{HFS}} &\sim \left| \frac{\mathcal{B}\mu_{eg}}{\mathcal{E}d_{eg}} \right|^2 \frac{\omega_{\text{HFS}}^3}{\omega_{\text{opt}}^3} \\ &\sim \alpha_{\text{fine}}^2 \frac{\omega_{\text{HFS}}^3}{\omega_{\text{opt}}^3} \end{aligned}$$

举例:

氢原子基态  $21\text{cm}^{-1}$  线

铯原子  $6S_{1/2}$  F=3,4 线超精细跃迁。

## 4. Hydrogen 2S lifetime

我们发现, 虽然氢原子  $2S \rightarrow 1S$  跃迁频率和  $2P \rightarrow 1S$  几乎完全相同, 但是由于  $2S \rightarrow 1S$  的直接跃迁没有跃迁矩阵元,  $\langle 1S|V|2S\rangle = 0$ , 因此  $|2S\rangle$  态是非常稳定的, 寿命高达  $\tau_{2S} = 121 \text{ ms}$ , 由多光子自发辐射过程决定。

## E. Purcell 效应

我们改写式 (67):

$$\Gamma = 2\pi \overline{|g_{\mathbf{k}}|^2}_{\omega_{\mathbf{k}}=\omega_{eg}} \rho(\omega_{eg}) \quad (71)$$

其中  $\overline{|g_{\mathbf{k}}|^2}_{\omega_{\mathbf{k}}=\omega_{eg}}$  是能量  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{eg}$  的各模式光子和二能级原子耦合强度的平均值,  $\rho(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$  是光子的态密度。原子的自发辐射率决定于原子内禀性质  $\mathbf{d}_{eg}$  以及跃迁频率  $\omega_{eg}$ , 也决定于环境的光子态密度  $\rho(\omega_{eg})$ 。通过改变环境, 可以改变原子的自发辐射。

举例 1: 在电介质旁边的自发辐射

举例 2: 里德堡原子辐射率的超导腔抑制

另见本课程 CQED 部分。

### F. Wigner-Weisskopf 步骤-III

和式 (45) 一样, 对式 (72) 更加严格的处理是首先对散射振幅积分:

$$c_{\mathbf{k}}(t) = -i \int_0^t g_{\mathbf{k}}^* e^{-i\Delta_{\mathbf{k}}\tau} c_e(\tau) d\tau \quad (72)$$

带入到第一式, 有

$$\dot{c}_e = - \int_0^t \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\Delta_{\mathbf{k}}(t-\tau)} c_e(\tau) d\tau \quad (73)$$

和此前一样, 我们考虑积分核

$$K(t) = \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\Delta_{\mathbf{k}}t} \quad (74)$$

在  $\delta t \gg \xi/\omega_1$  时间尺度上,  $K(t) \sim \delta(t)$ , 因此有 -

#### 1. Markovian 近似-III

$$\begin{aligned} i\dot{c}_e(t) &= -ic_e(t) \int_0^t K(t-\tau) d\tau \\ &= (-i\Gamma/2 + \delta_L)c_e(t) \end{aligned} \quad (75)$$

其中

$$\int_0^t K(t-\tau) d\tau = \frac{\Gamma}{2} + i\delta_L \quad (76)$$

$\Gamma$  由式 (67) 给出。

### G. Lamb 移动

$$\begin{aligned} \delta_L &= \sum_{\mathbf{k}} P \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2}{\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}}} \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} P \int d^3\mathbf{k} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V \hbar^2} \frac{|d_{eg}|^2}{\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}}} \\ &= \frac{|d_{eg}|^2}{\epsilon_0 \hbar c^3 (2\pi)^2} P \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{\omega_{eg} - \omega} \end{aligned} \quad (77)$$

是伴随自发辐射的能级移动 == Lamb 移动的一部分。为表述方便, 我们常常重新定义  $\omega_{eg} + \delta_L \rightarrow \omega_{eg}$ 。

## H. 非厄密有效哈密顿量, 量子坍缩算符, 主方程

平行于式 (51) 的推导, 对于原子系统的密度矩阵  $\rho = \text{trace}_R(|\psi\rangle\langle\psi|)$ , 我们有:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}(H_{\text{eff}}\rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger) + C\rho C^\dagger \quad (78)$$

其中

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\Gamma}|g\rangle\langle e| \\ H_{\text{eff}} &= H_0 - i\frac{\hbar}{2}C^\dagger C \end{aligned} \quad (79)$$

此处  $H_0$  可以计入驱动光场

$$H_0 = \frac{\hbar}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}$$

### 1. 光学布洛赫方程

记  $\mathbf{n} = \langle\vec{\sigma}\rangle$ , 我们知道  $\rho = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{n} \cdot \vec{\sigma})$ , 从式 (78), 有

$$\frac{d}{dt}\mathbf{n} = \vec{\Omega} \times \mathbf{n} + \begin{pmatrix} -\gamma_\perp n_x \\ -\gamma_\perp n_y \\ \gamma_\parallel(n_z + 1) \end{pmatrix} \quad (80)$$

其中“横向弛豫常数”

$$\gamma_\perp = \Gamma/2 + \gamma'$$

”纵向弛豫常数”

$$\gamma_\parallel = \Gamma$$

这些术语来源于核磁共振领域, “纵向弛豫”原指磁自旋和磁场的夹角变化, ”横向弛豫”指自旋进动的相位变化。在光学布洛赫方程中, 泛指布居弛豫和相干相位弛豫。由于横向弛豫对应系统的波函数, 而纵向弛豫对应于布居数, 因此我们显然有  $\gamma_\perp = \gamma_\parallel/2 + \gamma'$ , 其中  $\gamma'$  是由不影响布局分布的能级移动噪声造成 (例如磁场的涨落导致的随机能级移动)。

## I. 二能级原子荧光和饱和吸收和

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{gg} &= \frac{i\Omega}{2}\rho_{ge} - \frac{i\Omega^*}{2}\rho_{eg} + \Gamma\rho_{ee} \\ \rho_{ee} &= 1 - \rho_{gg} \\ \dot{\rho}_{ge} &= -\left(\frac{\Gamma}{2} + i\Delta\right)\rho_{ge} - \frac{i\Omega^*}{2}\rho_{ee} + \frac{i\Omega}{2}\rho_{gg} \\ \rho_{eg} &= \rho_{ge}^* \end{aligned} \quad (81)$$

考虑稳态解:  $\dot{\rho}^{SS} = 0$ ,

$$\begin{aligned} \rho_{ee}^{SS} &= \frac{|\Omega|^2/\Gamma^2}{1 + 4\frac{\Delta^2}{\Gamma^2} + 2\frac{|\Omega|^2}{\Gamma^2}} \\ \rho_{ge}^{SS} &= \frac{\Omega/2}{\Delta - i\Gamma/2} \frac{1 + 4\frac{\Delta^2}{\Gamma^2}}{1 + 4\frac{\Delta^2}{\Gamma^2} + 2\frac{|\Omega|^2}{\Gamma^2}} \end{aligned} \quad (82)$$

1. 自发辐射率

$$\gamma = \Gamma \rho_{ee}^{SS} = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s}$$

其中有饱和参数

$$s = \frac{2|\Omega|^2}{4\Delta^2 + \Gamma^2}$$

2. 极化率

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \mathbf{d}_{eg} \rho_{ge} + c.c. \equiv \alpha \langle \mathbf{E}^+ \rangle + c.c.$$

注意:  $\Omega = \langle \mathbf{E}^+ \rangle \cdot \mathbf{d}_{eg} / \hbar$ , 因此有原子极化率

$$\alpha = \frac{\mathbf{d}_{eg} \mathbf{d}_{ge} / \hbar}{\Delta - i\Gamma/2} \frac{1}{1+s} \quad (83)$$

带入  $\Gamma = \frac{|\mathbf{d}_{eg}|^2 \omega_{eg}^3}{3\pi\epsilon_0 c^3}$  (并简化  $\mathbf{d}_{eg} \mathbf{d}_{ge} \rightarrow |\mathbf{d}_{eg}|^2$ ), 有

$$\alpha = \epsilon_0 \frac{3\lambda^3}{8\pi^2} \frac{\Gamma/2}{\Delta - i\Gamma/2} \frac{1}{1+s}$$

J. 多级原子推广

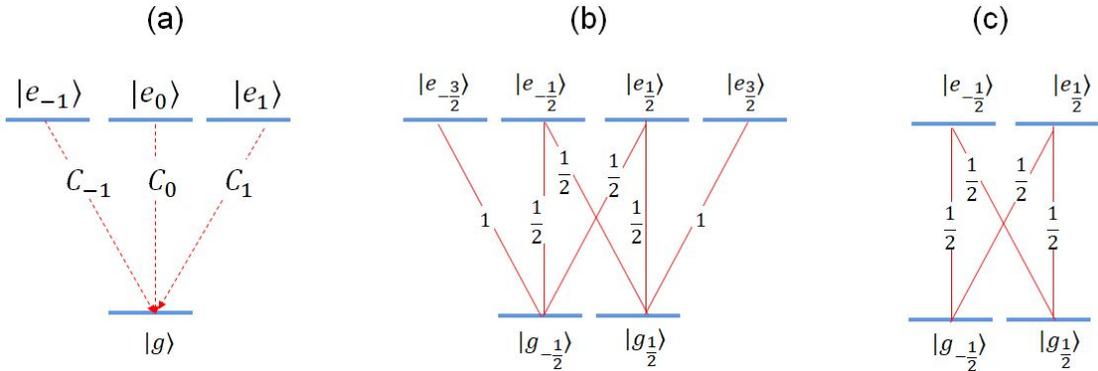


图 6. Transition level structure and relative strength for (a)  $J = 1 - J = 1$ , (b)  $J = 1/2 - J = 3/2$  D2 and (c)  $J = 1/2 - J = 1/2$  D1 transitions.

如图 (6) 所示, 原子系统和热库的耦合方式有三种:  $C_1, C_0, C_{-1}$ , 分别代表  $\sigma^+, \pi, \sigma^-$  跃迁。

### 1. $J=0 - J=1$

这是电偶极跃迁的最基本形式,  $S - P$  跃迁。

$$C_1 = \sqrt{\Gamma}|g\rangle\langle e_1|$$

$$C_0 = \sqrt{\Gamma}|g\rangle\langle e_0|$$

$$C_{-1} = \sqrt{\Gamma}|g\rangle\langle e_{-1}|$$

同时有  $H_{\text{eff}} = H_0 - \frac{i}{2} \sum_j C_j^\dagger C_j = H_0 - i\frac{\Gamma}{2} \sum_j |e_j\rangle\langle e_j|$ 。

### 2. 精细结构-D1

考虑电子自选后,  $P$  轨道激发态的自旋轨道耦合导致精细结构分裂, 相应跃迁矩阵元可以有投影定理计算获得, 对于 D1 谱线

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\Gamma/2}|g_{-\frac{1}{2}}\rangle\langle e_{\frac{1}{2}}|, \\ C_0 &= \sqrt{\Gamma/2}(|g_{\frac{1}{2}}\rangle\langle e_{\frac{1}{2}}| + |g_{-\frac{1}{2}}\rangle\langle e_{-\frac{1}{2}}|), \\ C_{-1} &= \sqrt{\Gamma/2}|g_{\frac{1}{2}}\rangle\langle e_{-\frac{1}{2}}|. \end{aligned} \quad (84)$$

有  $H_{\text{eff}} = H_0 - \frac{i}{2} \sum_j C_j^\dagger C_j = H_0 - i\frac{\Gamma}{2} \sum_j |e_j\rangle\langle e_j|$ 。

注意: 相同偏振、相同频率的热库光子不可分辨。

### 3. 精细结构-D2

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\Gamma/2}|g_{-\frac{1}{2}}\rangle\langle e_{\frac{1}{2}}| + \sqrt{\Gamma}|g_{\frac{1}{2}}\rangle\langle e_{\frac{3}{2}}|, \\ C_0 &= \sqrt{\Gamma/2}(|g_{\frac{1}{2}}\rangle\langle e_{\frac{1}{2}}| + |g_{-\frac{1}{2}}\rangle\langle e_{-\frac{1}{2}}|), \\ C_{-1} &= \sqrt{\Gamma/2}|g_{\frac{1}{2}}\rangle\langle e_{-\frac{1}{2}}| + \sqrt{\Gamma}|g_{-\frac{1}{2}}\rangle\langle e_{-\frac{3}{2}}|. \end{aligned} \quad (85)$$

有  $H_{\text{eff}} = H_0 - \frac{i}{2} \sum_j C_j^\dagger C_j = H_0 - i\frac{\Gamma}{2} \sum_j |e_j\rangle\langle e_j|$ 。

## III. 自发辐射的单光子波函数

从式 (75)

$$\begin{aligned} c_e(t) &= e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \\ c_{\mathbf{k}}(t) &= ig_{\mathbf{k}}^* \frac{1 - e^{-i\Delta_{\mathbf{k}}t - \frac{\Gamma}{2}t}}{\Delta_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} \end{aligned} \quad (86)$$

我们写出 Markovian 近似下的系统 + 热库波函数

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{\Gamma}{2}t - i\omega_{eg}t}|e, V\rangle + \sum_{\mathbf{k}} ig_{\mathbf{k}}^* \frac{1 - e^{-i\Delta_{\mathbf{k}}t - \frac{\Gamma}{2}t}}{\Delta_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}|g, 1_{\mathbf{k}}\rangle$$

考虑  $t \gg 1/\Gamma$ , 可以化简:

$$|\psi(t \gg 1/\Gamma)\rangle = \sum_{\mathbf{k}} i g_{\mathbf{k}}^* \frac{1}{\Delta_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} |g, \mathbf{1}_{\mathbf{k}}\rangle$$

这是一个单光子波包, 因此, 如果我们在  $\mathbf{r}$  处放置一个“无穷小”探测器, 其探测到光子的概率是  $\delta P(1)(\mathbf{r}, t) = \eta |\mathcal{E}_{\text{sp}}(\mathbf{r}, t)|^2$ , 其“单光子波函数”可以写为 (姑且忽略辐射光子的横波性):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{sp}}(\mathbf{r}, t \gg 1/\Gamma) &= \langle g, V | E^{(+)}(\mathbf{r}) | \psi(t) \rangle \\ &= i \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}^*(0) \mathbf{d}_{ge}}{\hbar} \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}}{\Delta_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} \\ &\rightarrow i \frac{V \mathbf{d}_{ge}}{\hbar (2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 V} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}}t}}{\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} \end{aligned} \quad (87)$$

注意原子的位置在  $\mathbf{r} = 0$ 。接下来用球坐标, 以探测器位置  $\mathbf{r}$  方向为  $z$  方向, 那么  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos\theta$ , 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{sp}}(\mathbf{r}, t \gg 1/\Gamma) &= i \frac{2\pi c \mathbf{d}_{ge}}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{k^3 e^{ikr \cos\theta - ickt}}{\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} \\ &= i \frac{c \mathbf{d}_{ge}}{\varepsilon_0 8\pi^2 r} \int_0^\infty dk \frac{k^2 (e^{ikr - ickt} - e^{-ikr - ickt})}{\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} \\ &= i \frac{c \mathbf{d}_{ge}}{\varepsilon_0 8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k^2 e^{ik(r-ct)}}{\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} \end{aligned} \quad (88)$$

对式 (88) 最后一行的积分, 可以拓展到复  $k$  平面上。如图..., 当  $r - ct > 0$  时, 被积函数在上半平面  $|k| \rightarrow \infty$  解析, 因此有

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{k^2 e^{ik(r-ct)}}{\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} = \oint_{C_+} dk \frac{k^2 e^{ik(r-ct)}}{\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} = 0$$

当  $r - ct < 0$  时, 被积函数在下半平面  $|k| \rightarrow \infty$  解析, 围道积分仅有  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{eg} - i\Gamma/2$  奇点的留数贡献

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{k^2 e^{ik(r-ct)}}{\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} = \oint_{C_-} dk \frac{k^2 e^{ik(r-ct)}}{\omega_{eg} - \omega_{\mathbf{k}} - i\Gamma/2} = 2\pi i \frac{\omega_{eg}^2}{c^3} e^{-i(\omega_{eg} - i\Gamma/2)(t-r/c)}$$

综合起来, 我们有:

$$\mathcal{E}_{\text{sp}}(\mathbf{r}, t \gg 1/\Gamma) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\omega_{eg}^2}{c^2} \frac{\mathbf{d}_{ge}}{r} e^{-i(\omega_{eg} - i\Gamma/2)(t-r/c)} \Theta(t - r/c) \quad (89)$$

其中  $\Theta(t)$  是单位越变函数:  $t < 0$  时  $\Theta(t) = 0$ ,  $t > 0$  时  $\Theta(t) = 1$ 。计入光场的横波性, 上式需要调整为:

$$\mathcal{E}_{\text{sp}}(\mathbf{r}, t \gg 1/\Gamma) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\omega_{eg}^2}{c^2} \left( \frac{\mathbf{d}_{ge}}{r} - \frac{\mathbf{d}_{ge} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r}}{r^3} \right) e^{-i(\omega_{eg} - i\Gamma/2)(t-r/c)} \Theta(t - r/c) \quad (90)$$

即自发辐射光子在  $t \gg 1/\Gamma$  是集中于  $r = ct$  的光锥内侧的球面波, 指数衰减 (图...).

#### 第四次作业第一部分

- 1) 请从式 (24) 出发, 详细推导式 (25) 瑞丽散射率。
- 2) 请从式 (30)(31) 出发, 证明式 (32)。
- 3) 请推导式 (34), 并计算振幅比例  $r_E(t) = \frac{\langle a(t) \rangle \mathcal{E}_1(0)}{\beta_a \mathcal{E}_d(0)}$ 。

- 4) 请结合式 (29), 详细推导式 (41)。
- 5) 请结合上下文, 从式 (49) 出发详细推导式 (50)。
- 6) 请在国际单位制下估算氢原子自发辐射率  $\Gamma_{2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}}$  数值。
- 7) 考察式 (72) 到式 (77) 的推导, 如果我们忘记基础物理, 直接设光场运动于二维空间, 其他基本假设不变。请重复自发辐射率  $\Gamma$  和激发态“兰姆移动”  $\delta_L$  的推导。