

线性量子光学-I

吴赛骏*

复旦大学物理系, 上海 200433, 中国。

本文档随教学进程跟新。

在上节课介绍自由化量子光场的联合光子计数, 光场的强度关联函数, 散粒噪声等问题。其中光测量的引入过程中我们考虑了光电效应的量子力学微扰计算。运用的哈密顿量是

$$H = - \sum_s \mathbf{E}(\mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{d}_s \quad (1)$$

这儿 \mathbf{d}_s 是物质体系位于 $\mathbf{r}_s, s = 1, \dots, N$ 的局域电偶极算符。

式 (1) 哈密顿量可对量子光场和物质相互作用进行比较一般的描述。借用式 (1), 在上节课以前我们已经考察了

1) 量子化自由光场和预设运动下”经典振荡偶极子“的相互作用, 对应的光和物质相互作用哈密顿量可以写为:

$$H = - \sum_s \mathbf{E} \cdot \langle \mathbf{d}_s \rangle \quad (2)$$

我们发现, 和诸位同学的手机天线电路微波辐射一样, 偶极子的经典集体运动 $\sum_s \langle \mathbf{d}_s \rangle$ 驱动光场相干态的产生。

2) 将量子化自由光场的状态“限制为”预设的相干态, 获得“半经典量子光学”哈密顿量:

$$H = - \sum_s \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \mathbf{d}_s \quad (3)$$

这样我们就可以描述在经典场 $\langle \mathbf{E} \rangle = E(\alpha, \alpha^*)$ 驱动下的单原子 ($s = 1$) 或者多原子 ($s = 1, \dots, N$) 电偶极运动动力学。我们还考察了驱动单个二能级原子的动力学, Bloch 球动力学, 原子钟, 等等。

此外, 我们还给出了激光是光场相位 $U(1)$ 对称性自发破全, 形成相干态的“玩具模型”证明。

上述讨论在特定问题及相应的特定时间和空间尺度上通过抓住主要矛盾, 有效化简式 (1) 哈密顿量, 形成简单局面, 深化我们对光和物质相互作用的理解。然而另一方面, 在描述更加复杂的问题时, 上述模型则变得不足。为此, 我们需要结合具体问题, 更加小心的从式 (1) 哈密顿量中提取有效相互作用, 形成针对具体问题的合理近似。

例如, 在下一节课, 我们会考察二能级原子和(多模)真空光场的相互作用, 引入开放系统的随机波函数方法并考察多能级原子在连续测量下的量子演化和光学响应。在本课程最后部分, 我们会考察二能级原子和单模量子光场的相互作用的一般规律(第一激发态动力学已经在第二讲讨论了)。

本节课, 我们要考察的内容, 在上述知识体系框架下, 是量子光场和“经典介质”的相互作用。不同于式 (2) 中被“规定”运动方法的“经典振荡偶极子”, 本节课中我们考虑的“经典介质”是宏观电介质, 由不同折射率的玻璃构成的反射镜, 透镜, 分束镜, 甚至是光纤波导等构成, 统称为“线性光学元件”。这些元件的动力学由入射的光场决定, 而响应方法则完全由其折射率 n 决定。这些经典元件对量子光场的作用, 最直接的计算方法是重新求解 Maxwell 方程的模式函数, 进而以新的模式函数对光场量子化。然而对于开放空间中稀疏放置光学元件和光场地相互作用, 更加方便地方法是将相互作用在海森堡绘景下“吸收”到光场模式演化, 进而由模式函数变换矩阵刻画相应的输入输出算符变换。

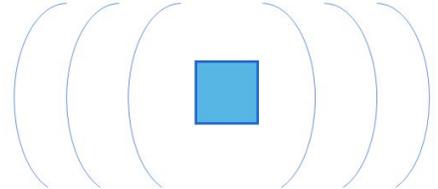
* saijunwu@fudan.edu.cn

I. 光场的线性光学变换

A. 电介质光场的量子化

$$H = \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}), \chi(\omega, \mathbf{r}) \approx \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \alpha(\omega)$$


$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \tilde{\varepsilon}_j(\mathbf{r}) e^{-i\tilde{\omega}_j t} \tilde{a}_j + h.c.$$

图 1. Quantization of Electro-magnetic field in presence of loss-less dielectrics, *i.e.*, transparent glasses.

1. 电介质自由度的绝热消除 (可跳过)

这个我们上一讲中没有讲到，这儿补一下。

事实上，从式 (1) 出发，如果我们需要考虑的光场较弱，远离物质激发共振，那么物质激发可能完全由当前的光场决定。

我们考察式 (1) 对应算符的海森堡运动方程。为强调算符属性，本小节我们把算符变量的帽子 $\hat{\cdot}$ 加上。考虑物质中位于 \mathbf{r} 的偶极子 $\hat{\mathbf{d}}(t) = \sum_{eg} \hat{\mathbf{d}}_{eg}(t) e^{-i\omega_{eg} t} + h.c.$, $\hat{\mathbf{d}}_{eg}(t) = \mathbf{d}_{eg} \sigma_{eg}(t)$ 是电偶极升算符。光场电场算符为 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_j t} + h.c.$, $\hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_j(\mathbf{r}) \hat{a}_j(t)$ 是单模正频电场算符 – 注意由于有电偶极相互作用，升算符 $\hat{\sigma}_{eg} = \hat{\sigma}_{eg}(t)$ 及光场湮灭算符 $\hat{a} = \hat{a}(t)$ 在海森堡绘景下都会变化 – 以下一个重要假设是这种相互作用导致的变化是缓慢的。

在弱激发条件下，原子基本上总是处于稳定基态：

$$\langle [\hat{\mathbf{d}}_{eg}(t), \hat{\mathbf{d}}_{ge}(t)] \rangle = \langle \mathbf{d}_{eg} \mathbf{d}_{ge} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \rangle \approx -\mathbf{d}_{ge} \mathbf{d}_{eg} \rho_g \quad (4)$$

注意：上式最后我们设基态布居 $\langle g|\rho|g\rangle = \rho_g \gg \rho_e$ ，是为弱激发。为不失一般性，我们还假设原子体系可能存在不止一个基态 $|g\rangle$ ，只是假设 ρ_g 不随时间变化。

我们有电偶极算符的海森堡运动方程，

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{d}}(t) \approx \sum_{j,e,g} -\rho_g \mathbf{d}_{ge} \mathbf{d}_{eg} (\hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega_j - \omega_{eg})t} + \hat{\mathbf{E}}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega_j + \omega_{eg})t}) + h.c. \quad (5)$$

而对于 $\hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ 来说, 其方程我们暂不写出, 仅假设其缓变, 即在 $\delta t \sim 1/|\omega_j \pm \omega_{eg}|$ 时间尺度上几乎没有变化, 那么通过分部积分即可得到:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{d}}(t) &\approx \hat{\mathbf{d}}(0) + \sum_j \left(\alpha(\omega_j) \hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t)(e^{-i\omega_j t} - 1) + \alpha(-\omega_j) \hat{\mathbf{E}}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t)(e^{i\omega_j t} - 1) + h.c. \right), \\ &= \sum_j (\alpha(\omega_j) + \alpha^*(-\omega_j)) \hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_j t} + h.c. + \text{slow terms}\end{aligned}\quad (6)$$

其中有线性极化率 (注意我们记号出现简并。这里的 α 不是相干态振幅了)

$$\alpha(\omega) = \sum_{e,g} \rho_g \frac{\mathbf{d}_{ge} \mathbf{d}_{eg}}{\hbar(\omega_{eg} - \omega)} \quad (7)$$

式 (6) 说明, 在远失谐, 弱激发极限下, 原子偶极算符光频振荡的演化完全由当前外场 “即时决定”。

注意到从式 (1) 到式 (6), 其中关键步骤是式 (4) 近似。更加细致的分析表明, 该近似对应于假设 ρ_g 是一个在光场缓慢变化过程中的 “绝热不变量”, 因此式 (6) 又称为对电偶极自由度的绝热消除。

如果粒子密度充分大, 且位置 \mathbf{r}_s 存在充分的随机性, 那么原子密度分布 $\rho(\mathbf{r}) = \sum_s \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$, $\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle \lambda^3 \gg 1$ 可以等效为连续, 相应极化率 $\chi(\omega, \mathbf{r})$ 在我们关心的光学波长尺度上是光滑函数。这个连续统假设对常规固体和常压气体来说, 在 $\lambda \sim 1 \mu\text{m}$ 的光学波段, 都是成立的。光场的连续体宏观传播动力学由宏观 Maxwell 方程描述, 相对方便。为考察自由场 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ 在透明电介质线性响应扰动下的动力学, 我们可以引入等效相互作用哈密顿量

$$\begin{aligned}H_{\text{eff}} &= -\varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} \left(\sum_j \chi(\omega_j, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_j t} + h.c. \right) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \\ \chi(\omega, \mathbf{r}) &\approx \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle \frac{1}{\varepsilon_0} (\alpha(\omega) + \alpha^*(-\omega))\end{aligned}\quad (8)$$

注意到在式 (8) 本构关系中我们运用了 “ \approx ”。这是因为 $\hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ 缓变假设要求 $\chi(\omega, \mathbf{r}) \ll 1$ 。如果该条件不满足, 则自由场模式函数 \mathcal{E}_j 决定的 $\hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ 算符按照 H_{eff} 的演化不再缓变, 形成矛盾。这个情况下, 我们需要针对介质分布, 重写求解模式函数 (见下一小节), 并对 “我们关心的光场模式” 确立缓变条件。这个过程牵涉到一个构建本构关系过程中的重要细节: 将散粒介质等效为连续介质过程中粒子间稳态偶极-偶极相互作用的正确处理, 感兴趣的同学可以调研一下 “局域场近似”。

最后就式 (6) 再讨论一下:

1) 对于我们关心的光场模式来说, 式 (6) 近似在 $\delta t \gg 1/|\omega_j \pm \omega_{eg}|$ 的慢时间尺度上成立。由式 (7), 该要求同时保证了 $\alpha(\omega)$ 在 $1/\delta t$ 频率尺度上是缓变函数。

2) 从式 (5) 出发, 我们还可以通过对 $\hat{\mathbf{d}}(t)$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ 傅里叶变换, 获得严格的线性关系

$$\hat{\mathbf{d}}(\omega) = (\alpha(\omega) + \alpha^*(-\omega)) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (9)$$

和式 (6) 相比, 这个频域的线性关系并不直接将 $\hat{\mathbf{d}}(t)$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ “即时性质” 联系起来, 有时候并不好用。

3) 注意上述分析中我们并没有考虑不同基态 (或者说稳定态) 之间的相干性, 结合相应 $\hat{\mathbf{E}}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ 海森堡方程的细致分析可以看出, 如果多频光场多个基态能级产生共振 (拉曼共振), 则 $\alpha(\omega)$ 在多光场影响下可能成为存在强烈色散的张量 (即 $\alpha(\omega)$ 随 ω 快速变化), 而式 (6) 近似在长时间上会随着拉曼相干演化而被破坏。

2. 本征模式展开

如果电介质是连续的, 即 $\chi(\omega, \mathbf{r})$ 是一个在我们关心的光学波长尺度上是光滑函数, 则鉴于式 (9) 线性关系, 我们可以引入电位移矢量场

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \sum_{\omega} (1 + \chi(\mathbf{r}, \omega)) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (10)$$

同时引入磁场强度 $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$ 。电磁场系统的总哈密顿量可以写为

$$H_{\text{dialec}} = \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (11)$$

我们可以直接对式 (11) 以电介质体系的本征模式重新展开:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \tilde{\mathcal{E}}_j(\mathbf{r}) e^{-i\tilde{\omega}_j t} \tilde{a}_j + h.c. \quad (12)$$

本征模式函数满足介质中的波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathcal{E}}_j + \varepsilon(\tilde{\omega}_j, \mathbf{r}) \frac{\tilde{\omega}_j^2}{c^2} \tilde{\mathcal{E}}_j = 0 \quad (13)$$

及相应边条件, 而 $\{\tilde{\mathcal{E}}_j\}$ 是该函数空间的正交完备函数集。我们有正交条件:

$$\int d^3\mathbf{r} \varepsilon(\tilde{\omega}_j, \mathbf{r}) \tilde{\mathcal{E}}_j^*(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathcal{E}}_k(\mathbf{r}) = \frac{\hbar \tilde{\omega}_j}{2} \delta_{jk} \quad (14)$$

这儿 $\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = 1 + \chi(\omega, \mathbf{r})$ 是相对介电常数, 我们常常令

$$n^2(\omega, \mathbf{r}) = 1 + \chi(\omega, \mathbf{r}) \quad (15)$$

B. 输入输出关系

从式 (12), 我们原则上可以刻画任意透明电介质体系的量子光场。然而运用式 (12) 的困难在于模式函数可能非常复杂, 且随具体介质分布 $\chi(\omega, \mathbf{r})$ 多变, 不利于实际应用。

而如图 (2) 所示, 现实生活中常常是我们关心的光场基本是在自由空间传播, 仅在很小的区域和电介质形成局部相互作用, 特别是被精心设计的透镜, 反射镜, 分束镜, 光纤波导, 光栅, 等光学元件。因此, 我们希望用自由空间的光场模式函数来描述我们的光场, 并将光学元件对光场的作用以输入输出关系表达。为此, 我们利用本征模式 $\tilde{\mathcal{E}}_j$ 来合成出时长为 T , 在 $t \ll -T$ 时沿着 z 方向传播的“脉冲光场”模式, $\mathcal{E}_l(\mathbf{r}, t \ll -T) = \sum_j \tilde{S}_{lj} \tilde{\mathcal{E}}_j(\mathbf{r}, t)$, 其中 \tilde{S}_{lj} 为合成系数。注意此时该“脉冲光场”完全是自由传播 (图 (2))。我们接下来考虑该脉冲光场在 $t = 0$ 时刻附近和位于 $z = 0$ 附近的光学元件相互作用, 不难得到

$$\mathcal{E}_l(\mathbf{r}, t \gg T) = \sum_m (S^\dagger)_{lm} \mathcal{E}'_m(\mathbf{r}, t) \quad (16)$$

这里 $(S^\dagger)_{lm} = S_{ml}^*$ 。 S 是和 \tilde{S}_{lj} 及接下来要介绍的 \tilde{S}'_{mj} 构造系数相关的线性光学变换矩阵, 由波动方程式 (13) 及边条件决定的正交模式函数 (14) 决定。

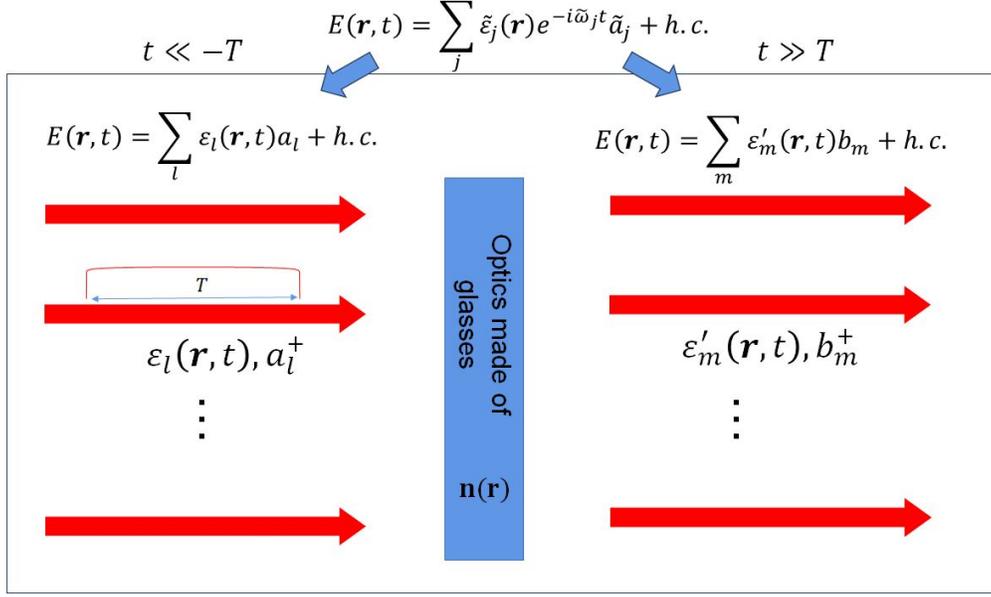


图 2. Input-output relation through transformation of “pulsed” fields.

同理，我们还可以利用本征模式 $\tilde{\mathcal{E}}_j$ 来合成时长为 T ，在 $t \gg T$ 时沿着 z 方向传播的“脉冲光场”模式， $\mathcal{E}'_m(\mathbf{r}, t \gg T) = \sum_j \tilde{S}'_{mj} \tilde{\mathcal{E}}_j(\mathbf{r}, t)$ ， \tilde{S}'_{mj} 为另一种和上述 \tilde{S}_{ij} 相关，经仔细调节后的合成系数，那么我们可以反推 $t \ll -T$ 时候的光场模式

$$\mathcal{E}'_m(\mathbf{r}, t \ll -T) = \sum_l S_{ml} \mathcal{E}_l(\mathbf{r}, t), \quad (17)$$

由式 (13)(14)，模式变换矩阵 S 是幺正矩阵， $S^\dagger S = S S^\dagger = 1$ 。

由式 (16)(17)，我们可以就“我们关心的光场模式”，对电场算符展开

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \sum_l \mathcal{E}_l(\mathbf{r}, t) a_l + h.c., & \text{for } t \ll -T \\ \sum_m \mathcal{E}'_m(\mathbf{r}, t) b_m + h.c., & \text{for } t \gg T \end{cases} \quad (18)$$

其中，基于模式函数变换对应算符变换的原则，

$$\begin{aligned} a_l^\dagger &= \sum_m S_{lm}^\dagger b_m^\dagger = \sum_m S_{ml}^* b_m^\dagger, \\ b_m^\dagger &= \sum_l S_{ml} a_l^\dagger \end{aligned} \quad (19)$$

按照式 (18)，我们已经将时空分成“输入端”和“输出端”，在 $t \ll -T$ 的输入端，我们希望用含时模式 $\{\mathcal{E}_l(\mathbf{r}, t)\}$ 及相应 $\{a_l, a_l^\dagger\}$ 描述光场。在 $t \gg T$ 的输出端，我们希望用含时模式 $\{\mathcal{E}'_m(\mathbf{r}, t)\}$ 及相应 $\{b_m, b_m^\dagger\}$ 描述光场。我们可以在输入端构造输入光子态：

$$|\psi_{\text{in}}(t \ll -T)\rangle = f(a_l^\dagger)|V\rangle \quad (20)$$

则式 (19) 关系允许我们方便的构造出薛定谔绘景下的输出端光子态：

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = |\psi_{\text{in}}(t \gg T)\rangle = f\left(\sum_m S_{ml}^* b_m^\dagger\right)|V\rangle \quad (21)$$

用于计算输出端观测量 $O_{\text{out}}(b_m, b_m^\dagger)$ 的期待值。

反过来说，我们可以在输出端构造光子态：

$$|\psi_{\text{out}}(t \gg T)\rangle = g(b_m^\dagger)|V\rangle \quad (22)$$

则式 (19) 关系允许我们反推相应的输入端光子态：

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_{\text{out}}(t \ll -T)\rangle = g\left(\sum_l S_{ml}a_l^\dagger\right)|V\rangle \quad (23)$$

用于计算输入端观测量 $O_{\text{in}}(a_l, a_l^\dagger)$ 的期待值。

C. 等效输入输出关系

从上述含时演化分析不难看出，在计算输入输出观测量的时候，我们可以结合式 (19) 等效忽略含时演化，直接规定，

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = |\psi\rangle_{\text{out}} \quad (24)$$

具体来说，对于输出端 $|\psi\rangle_{\text{in}} = f(a_l^\dagger)|V\rangle$ ，输出态可以写为

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = f\left(\sum_m S_{ml}^*b_m^\dagger\right)|V\rangle \quad (25)$$

反过来说，输出端 $|\psi\rangle_{\text{out}} = g(b_m^\dagger)|V\rangle$ 对应于输入态

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = g\left(\sum_l S_{ml}a_l^\dagger\right)|V\rangle \quad (26)$$

另一方面，对于输入端观测量 $O_{\text{in},A}(a_l, a_l^\dagger)$ ，输出端观测量 $O_{\text{out},B}(b_m, b_m^\dagger)$ ，我们分别可以表达为输出端和输入端的算符函数：

$$\begin{aligned} O_{\text{out},A}(b_m, b_m^\dagger) &= O_{\text{in},A}\left(\sum_m S_{ml}b_m, \sum_m S_{ml}^*b_m^\dagger\right), \\ O_{\text{in},B}(a_l, a_l^\dagger) &= O_{\text{out},B}\left(\sum_l S_{ml}^*a_l, \sum_l S_{ml}a_l^\dagger\right), \end{aligned} \quad (27)$$

式 (19) 及式 (24) 是线性量子光学的重要关系。依据相应式 (25)(26) 及式 (27) 变换，任何观测量 O_{in} 或 O_{out} 的推导计算均可以选择在输入端或者输出端展开，方便有利即可。

D. 回顾：杨氏干涉（可跳过）

上述线性变换也可以用于自由空间传播，只是需要注意，自由空间传播相应的模式变换矩阵 S_{lm} 虽然简单（常常就是基于惠更斯原理或者夫琅和费衍射），但常常是无穷维的。此外，如果有光阑损耗，仍可以将透射部分提取出来进入分析，损耗部分不分析即可。

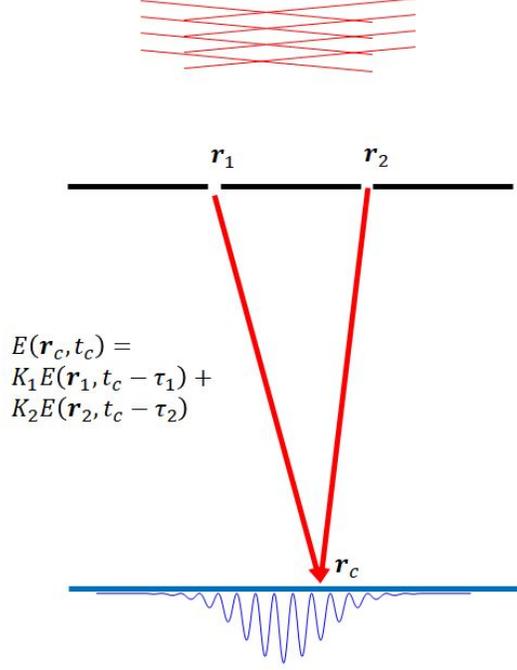


图 3. Field transformation in Young's double-slit setup.

E. 线性光学变换矩阵

已经提到，线性光学由折射率变化导致，相互作用的厄密性保证了变换矩阵 S 为酉矩阵：

$$S^\dagger S = S S^\dagger = 1, \quad (28)$$

$$\sum_m S_{lm}^* S_{l'm} = \sum_m S_{lm} S_{l'm}^* = \delta_{ll'}$$

1. 2×2 分束器基本单原

考察图 (4a) 所示分束器，这种分束器由左下和右上两块玻璃构成，分束界面是 45 度接触面。光学技术可以通过镀膜，使得正入射的 $\mathcal{E}_{1,2}$ ，正出射 $\mathcal{E}'_{1,2}$ 在直角界面处没有反射。分束器的模式变换矩阵可以写为：

$$S = \begin{bmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{bmatrix} \quad (29)$$

其中 $|t|^2 + |r|^2 = 1$ 保证么正性。

我们当然可以考虑两个模式的“自由传播”

$$S_f(\varphi_{1,2}) = \begin{bmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

通过一段自由传播，可以重写式 (29) 为 $S = S' S_f$ ，得到

$$S' = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{i\varphi} \\ -\sin(\theta)e^{-i\varphi} & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (31)$$

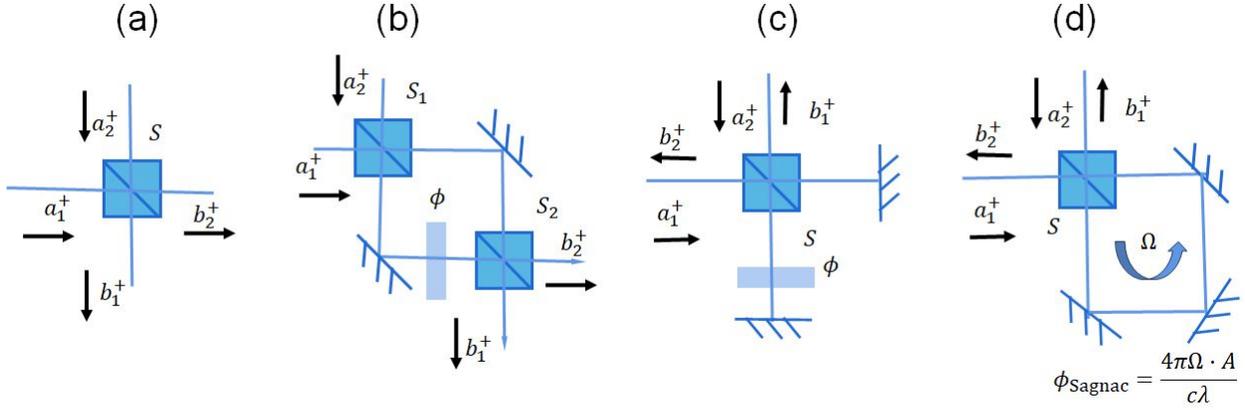


图 4. Examples of 2×2 beamsplitters. Fig. (a) gives basic beamsplitter. Figs. (b-d) gives “composite” beamsplitters: (b) Michelson Interferometer; (c) Sagnac Interferometer; (d) Mach-Zendher Interferometer.

其中透射系数 $t = \cos\theta$ 为实数。

进一步可以证明，结合自由传播，分束器矩阵式 (29) 总可以表达为 $S = S_{f1}S'S_{f2}$ ，使得

$$S' = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (32)$$

约化为单参数的实矩阵。或者以纯虚数为非对角元的对称矩阵，

$$S' = \begin{bmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (33)$$

当然，在反射率接近完美的极限下，我们有“完美”反射镜的变换矩阵：

$$S_m = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ -e^{-i\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

这儿的负号蛮有意思的，可以讨论一下怎么测量。

实际运用式 (31)(32)(33)(34) 时，我们选择有利于推导和表达，方便的反射相位。

F. 2×2 干涉仪的变换矩阵 - 复合分束器

如图 (4b) 的干涉仪光路是著名的 Mach-Zendher 干涉仪结构。设输入光场模式为 $\mathcal{E}_{1,2}$ ，对应升算符为 $a_{1,2}^\dagger$ ，输出模式为 $\mathcal{E}'_{1,2}$ ，对应升算符为 $b_{1,2}^\dagger$ ，变换矩阵可以很容易写出来：

$$\begin{aligned} S_{MZ} &= S_2 S_f S_1, \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & i\sin\theta_2 \\ i\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -i\sin\theta_1 \\ -i\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{i\phi/2}\cos\theta_1\cos\theta_2 + e^{-i\phi/2}\sin\theta_1\sin\theta_2 & ie^{-i\phi/2}\cos\theta_1\sin\theta_2 - ie^{i\phi/2}\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ +e^{i\phi/2}\sin\theta_1\cos\theta_2 - e^{-i\phi/2}\cos\theta_1\sin\theta_2 & -ie^{-i\phi/2}\sin\theta_1\sin\theta_2 + ie^{i\phi/2}\cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

我们可以考虑 50/50 分束镜, $\theta_{1,2} = \pi/4$, 我们有

$$S_{MZ} = \begin{bmatrix} \cos\phi/2 & \sin\phi/2 \\ -\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

如图 (4c) 的干涉仪光路是著名的迈克耳孙干涉仪结构。注意这里输出模式 $\mathcal{E}'_{1,2}$ 是输入模式 $\mathcal{E}_{1,2}$ 的原路返回。而同一个分束器 S 被运用了两次。还是假设这个分束器是 50% – 50% 分束, 那么迈克耳孙干涉仪的变换矩阵是

$$\begin{aligned} S_{MI} &= S^T S_f S, \\ &= \begin{bmatrix} \sin\phi/2 & \cos\phi/2 \\ -\cos\phi/2 & \sin\phi/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

注意, 在上式推导中, 我们认为第二次分束对应的变换矩阵 $S' = S^T$ 为第一次 S 的转置, 这是因为由于反射镜的作用, 第二次分束时光路顺序有了交换。这个细节可以体会一下 – 体会不出来问题也不大, 因为我们在迈克耳孙干涉结构中, 我们总可以重写定义自由传播相位 ϕ , 等效的重写 S' 。

迈克耳孙干涉仪最著名的实验包括以太实验和引力波实验:

- 上个世纪初迈克耳孙试图运用萨尼亚克干涉仪测得获得地球相对于“以太”运动造成的相移 ϕ , 结果为零。

- 2017 年美国引力波天文台运用迈克耳孙干涉仪测量到引力波扰动造成的双臂光场差 ϕ 。

如图 (4c) 的干涉仪光路是著名的萨尼亚克干涉仪结构。和迈克耳孙干涉仪一样, 这里输出模式 $\mathcal{E}'_{1,2}$ 是输入模式 $\mathcal{E}_{1,2}$ 的原路返回, 因此分束器被运用了两次。然而不同于迈克耳孙干涉, 这儿第二次分束相当于两个光束互换后实现第一次分束的“时间反演”, 因此 $S' = S$, 我们有

$$\begin{aligned} S_{Sagnac} &= S S_p S_f S, \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi/2 & \sin\phi/2 \\ -\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

这儿 $\phi = \phi_{\text{sagac}}$ 常常是由系统转动造成的。

$$\phi_{\text{sagac}} = \frac{4\pi\Omega \cdot A}{c\lambda} \quad (39)$$

注意, 和迈克耳孙构型不同, 这里 $\phi = 0$ 意义明确: 系统没有转动, 两个干涉臂的传播路径互为时间反演, 相位完全相同。我们发现, 在 50% – 50% 分束下, 如果从 \mathcal{E}_1 注入, 那么萨尼亚克干涉仪的零相位输出是从 \mathcal{E}'_1 原路返回。

- 上个世纪初迈克耳孙运用萨尼亚克干涉仪测得地球转动速度。

如式 (36)(37)(38) 的表达式非常有用: 再复杂的干涉仪, 只要最后是 2×2 的输入输出结构, 那么总可以等效为一个分束器, 而该分束器总可以写为式 (36) 的形式。因此, 2×2 干涉仪也可以认为是“复合分束器”。

需要注意的是, 虽然每个分束器的反射相位可以随意约定, 但是复合分束器计算中的相位关系必须有一致约定。例如在推导式 (35) 的时候, 我们对 $S_{1,2}$ 的反射相位进行了约定: $\arg[r_{1,2}] = \pm\pi/2$, 这个约定导致了式 (35) 中复合反射器的反射系数 $\arg[r] = 0$ (另见 Lecture8)。

G. 非理想光学元件

以上我们穷举了 2×2 理想光学元件的变换矩阵。对于非理想 2×2 的光学元件，我们可以将之建模为 4×4 的光学，相应的变换矩阵

$$S_l = S_2 S_1 S, \quad (40)$$

$$= \begin{bmatrix} t_2 & r_2 & 0 & 0 \\ -r_2^* & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & r_1 \\ 0 & 0 & -r_1^* & t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & r & 0 \\ 0 & -r^* & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $S_{1,2}$ 可以理解为理想分束器输出两个端口的损耗。这种变换矩阵对于非理想情况的推广方法是普适的 (另见 Lecture8)。

H. $n \times n$ 光学元件

我们可以通过运用 2×2 元件的串联和并联，构造 $n \times n$ 光学元件。具体步骤如下

- 1) 将 2×2 光学元件从左到右依次放置于二维光路 (光路的扁平化)
- 2) 将每个 2×2 光学元件的变换矩阵扩展到 $n \times n$ 空间: $S_{\sigma_j}^j \rightarrow S^j \equiv S_{\sigma_j}^j \otimes \bar{1}_{\sigma_j}$
- 3) $n \times n$ 变换矩阵由矩阵乘法给出: $S = \prod_j S^j$ 注意, 由于 S 是左乘于模式函数或者升降算符, 因此 $\prod_j S^j$ 也需要是左乘。

I. 一个 3×3 分束镜的例子

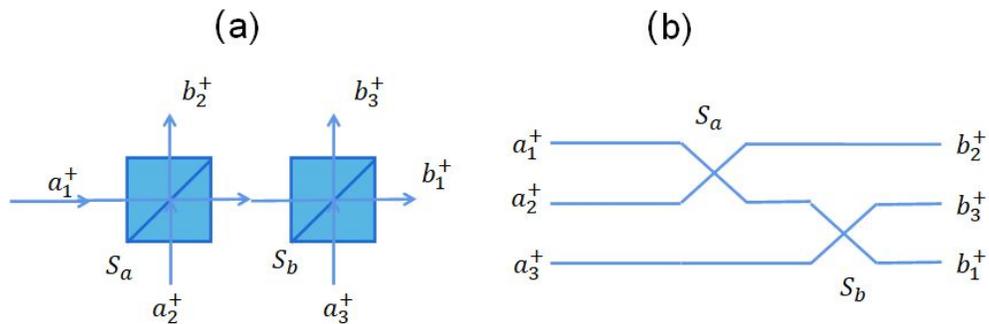


图 5. 由 $S_{a,b}$ 构成的 3×3 分束镜 (a): 实验室放置图。 (b) 扁平化光路图

如图 (5) 的光路, 三个输入态模式为 $\mathcal{E}_{1,2,3}$, 对应升降算符为 $a_{1,2,3}^\dagger$ 。三个输出态模式为 $\mathcal{E}'_{1,2,3}$, 对应升降算符为 $b_{1,2,3}^\dagger$ 。我们希望从两个分束器 $S_{a,b}$ 的 2×2 变换矩阵写出 3×3 变换矩阵 S 。由图 (5b) 可得:

$$\begin{aligned}
S &= S_p S_b S_a, \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \dots
\end{aligned} \tag{41}$$

其中 S_p 是置换矩阵，将 $b_{1,2,3}^\dagger$ 重新按照光路结构排序。

J. 到底是 n 是多少？

如图 (4)(5) 的光路，实际上比较麻烦。真实生活中，我们知道分束镜对光路是一分二，所以二分四。所以，原则上来说，2 个分束器对应的线性光学变换矩阵应该是 4×4 。可是图 (4) 光路却是 2×2 ，图 (5) 的光路是 3×3 ，怎么做到的？

答案：需要光路严格“模式匹配”的精细调节，让上一个分束器的输出模式对应于下一个分束器的输入模式。且时间上也需要依照图 (2)，一一对应。

以下本章考虑的 $n \times n$ 线性网络，均为时空模式匹配的情况。

II. 观测量

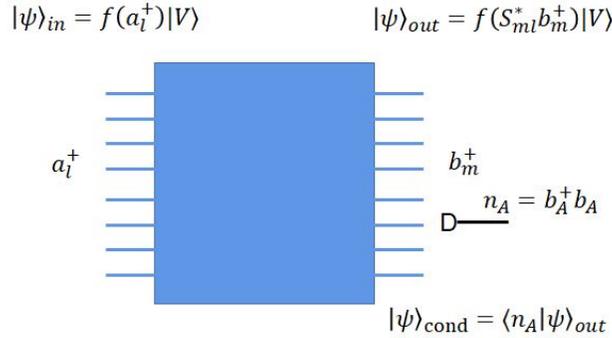


图 6. an $n \times n$ linear optics network, with an “auxiliary” output port \mathcal{E}'_A monitored. Conditioned upon an n_A measurement, the output quantum state is $|\psi\rangle_{\text{cond}} = \langle n_A | \psi \rangle_{\text{out}}$.

端口 m 的光子数测量

$$n_m = b_m^\dagger b_m$$

对 n_m 的多次测量可获得分布 \bar{n}_m 。统计测量结果的随机分布可以获得标准差

$$\Delta n_m = \sqrt{\langle n_m^2 \rangle - \langle n_m \rangle^2}$$

事实上，通过统计测量结果，我们还可以获得光子数分布函数 $f_m(n)$ ，可以表达为观测量

$$\delta_{\hat{n}_m, n} = |n\rangle \langle n|$$

的测量结果。

另一方面，通过对端口 m_1, m_2 的观测，我们可以直接通过关联计算（数字电路，模拟电路，都可以），获得联合分布函数等。

其中有联合计数：

$$\overline{n_{m_1} n_{m_1}} = \langle N[n_{m_1} n_{m_1}] \rangle = \langle n_{m_1} n_{m_1} \rangle$$

关联函数

$$g_{m_1, m_2}^{(2)} = \frac{\overline{n_{m_1} n_{m_1}}}{\overline{n_{m_1}} \overline{n_{m_1}}}$$

需要注意的是，由于 \mathcal{E}'_m 是正交模式，因此联合计数的正则排序 $N[\dots]$ 并不影响数算符的排列。

III. 条件量子态

考察 $n \times n$ 的线性光学系统，输入态为 $|\psi\rangle_{\text{in}}$ ，我们知道 $|\psi\rangle_{\text{out}} = |\psi\rangle_{\text{in}}$ 。

现考虑输出态模式 m_A 放置了一个探测器，探测到 n_A 个光子，其他态自由演化，那么有条件量子态（未归一化）：

$$|\psi'\rangle_{\text{cond}} = \langle n_A | \psi \rangle_{\text{out}} \quad (42)$$

当然，这样的态，出现的概率也可以计算出来

$$p(n_A) = \langle \psi' | \psi' \rangle_{\text{cond}} \quad (43)$$

条件量子态的归一化表示：

$$|\psi\rangle_{\text{cond}} = \frac{1}{\sqrt{p(n_A)}} \langle n_A | \psi \rangle_{\text{out}} \quad (44)$$

上述讨论，当然可以推广到多个探测器探测到多个光子的条件量子态。

实际生活中，光子数分辨的光子探测是一件不容易的技术。如果模场的持续时间 τ 在探测器响应分辨时间以内，那么我们几乎所有的单光子探测器只能给出“click”的信号，即有光子，或者没光子（没有“click”），而无法分辨光子个数。因此我们也常常有光子数不分辨的条件量子态的密度矩阵：

$$\rho_{\text{cond}} = \frac{1}{p} \sum_{n_A > 0} \langle n_A | \psi \rangle_{\text{out}} \langle \psi | n_A \rangle \quad (45)$$

需要注意的是，近十年来光子探测技术进步很快，其中基于超导相变的一类单光子计数器有很不错的光子数分辨能力，感兴趣的同学可以调研一下。

IV. 线性光学系统光子态变换具体案例

A. 单光子态

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = a_1^\dagger |V\rangle$$

具体实现 1：利用简并下转换实现条件量子态单光子波包

具体实现 2: CQED 激子单光子波包

线性光学网络:

1. 简单分束器 (式 (32))

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = (\cos(\theta)b_1^\dagger - \sin(\theta)b_2^\dagger)|V\rangle$$

1. M-Z 干涉仪: 复合分束器 (式 (36))

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = (\cos(\phi/2)b_1^\dagger - \sin(\phi/2)b_2^\dagger)|V\rangle$$

我们只分析 M-Z 干涉仪, 有:

$$\bar{n}_1 = \cos^2(\phi/2)$$

$$\bar{n}_2 = \sin^2(\phi/2)$$

$$\bar{n}_{12} = \bar{n}_1 - \bar{n}_2 = \cos(\phi) \quad (46)$$

此外, 我们还有

$$\overline{n_1 n_2} = \langle \psi | n_1 n_2 | \psi \rangle = 0$$

联合探测概率当然是零。

B. 单光子马赫-曾德干涉仪

接下来, 我们“跳一下”, 考虑运用光子数测量结果式 (46) 来反推马赫-曾德干涉仪的相移 ϕ 。我们知道:

$$\phi = 2N\pi + \arccos(\bar{n}_{12})$$

其中 N 这个整数我们可以想办法得到。

这样的估计, 误差是多少呢? 我们可以运用误差传递公式:

$$\Delta\phi = \Delta n_{12} / \partial_\phi \bar{n}_{12}$$

结合,

$$\Delta n_{1,2} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 - 2\bar{n}_1\bar{n}_2 - \bar{n}_{1,2}^2} = |\sin(\phi)| \quad (47)$$

有相位的测量精度:

$$\Delta\phi = \Delta n_{12} / \partial_\phi \bar{n}_{12}$$

$$= 1$$

显然, 这样的分析和 L3 课程原子钟分析在数学结构上是一样的, 我们考虑重复这样的单光子干涉测量 N 次, 可以获得更加精确的 (可能) 估计:

$$\begin{aligned}\phi &= 2N\pi + \arccos(\bar{n}_{12}) \\ \Delta\phi &= \frac{1}{\sqrt{N}}\end{aligned}\quad (48)$$

注意，上面的测量我们选取的观测量是 $n_{1,2}$ ，即两个探测器的光子数差。如果我们只看单个探测器，效果实际上也是一样的。

具体的，可以练习一下，参考单个探测器的光子数涨落：

$$\begin{aligned}\Delta n_1 &= \sqrt{\bar{n}_1^2 - \bar{n}_1^2} = \sqrt{\cos^2(\phi/2) - \cos^4(\phi/2)} = |\sin(\phi)|/2 \\ \Delta n_2 &= \sqrt{\bar{n}_2^2 - \bar{n}_2^2} = \sqrt{\sin^2(\phi/2) - \sin^4(\phi/2)} = |\sin(\phi)|/2\end{aligned}$$

C. 双光子态的 Hong-Ou-Mandel 效应

我们考虑双光子态：

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = a_1^\dagger a_2^\dagger |V\rangle$$

按照线性变换公式，我们有

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{\text{out}} &= (\cos(\theta)b_1^\dagger - \sin(\theta)b_2^\dagger)(\sin(\theta)b_1^\dagger + \cos(\theta)b_2^\dagger)|V\rangle \\ &= \left(\cos(2\theta)b_1^\dagger b_2^\dagger + \sin(2\theta)\frac{1}{2}((b_1^\dagger)^2 - (b_2^\dagger)^2) \right) |V\rangle\end{aligned}\quad (49)$$

我们发现，当式 (49) 中分束镜是 50/50，即 $\theta = \pi/4$ 时，

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \frac{1}{2}((b_1^\dagger)^2 - (b_2^\dagger)^2)|V\rangle\quad (50)$$

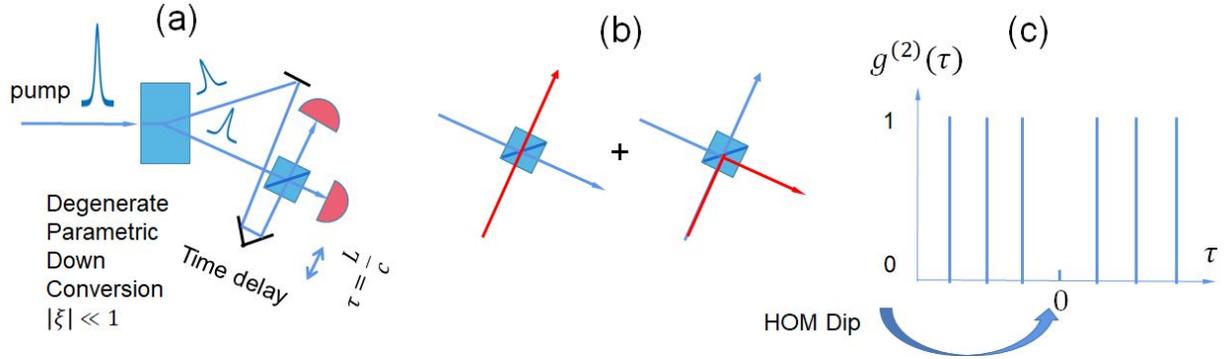


图 7. Hong-Ou-Mandel effect. (a) The two outputs of a two-mode “single-photon source” based on degenerate parametric down conversion is feed to a 50/50 beamsplitter. By varying the delay τ , the joint detection probability display a characteristic dip, as in (c). The effect is due to an interference of two amplitudes sketched in (b).

We can evaluate the output observables:

$$\langle n_1 \rangle = 1$$

$$\langle n_2 \rangle = 1$$

$$\langle n_1 n_2 \rangle = 0$$

具体到如图 (7) 的实验，通过延迟脉冲光，可以获得随着延时 τ 变化的二阶关联函数 $g^{(2)}(\tau)$ ，我们发现 $g^{(2)}(\tau = 0) = 0$ ，这个是著名的 Hong-Ou-Mandel 效应。

D. 相干态

由于相干态的唯一算符乘积对应指数算符的求和，因此相干态的线性光学变换非常方便

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{in}} &= \prod_l D_l(\alpha_l) |V\rangle = e^{\sum_l \alpha_l a_l^\dagger - h.c.} |V\rangle, \\ |\psi\rangle_{\text{out}} &= e^{\sum_{l,m} \alpha_l S_{ml}^* b_m^\dagger - h.c.} |V\rangle = \prod_{l,m} D_m(\beta_m) |V\rangle \end{aligned} \quad (51)$$

其中输出态的振幅 $\beta_m = \sum_l S_{ml}^* \alpha_l$ ，（其共轭）遵从和 $\mathcal{E}'_m = \sum_l S_{ml} \mathcal{E}_l$ 相同的规则。

V. 线性量子计算简介

A. 非线性符号门

Knill-Laflamme-Milburn 方案的改进版见图 (8)

对比：非线性光克尔效应。单光子非线性相移!!

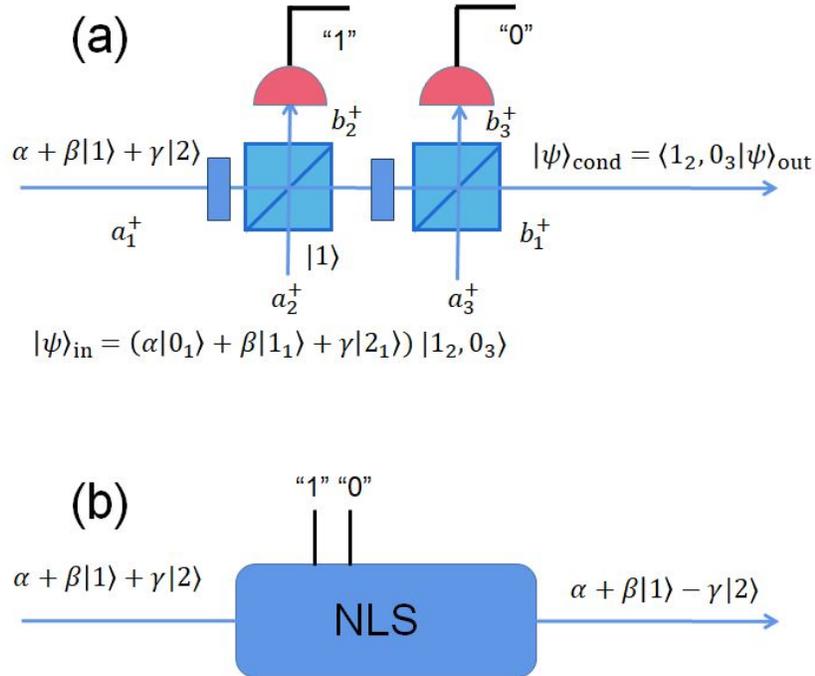


图 8. Nonlinear Sign gate (an improved implementation) (a) the setup. (b) effective diagram

基于 KLM 方案的双光子比特控制相位门，见图 (9)

对比：非线性光克尔效应。单光子非线性相移!!

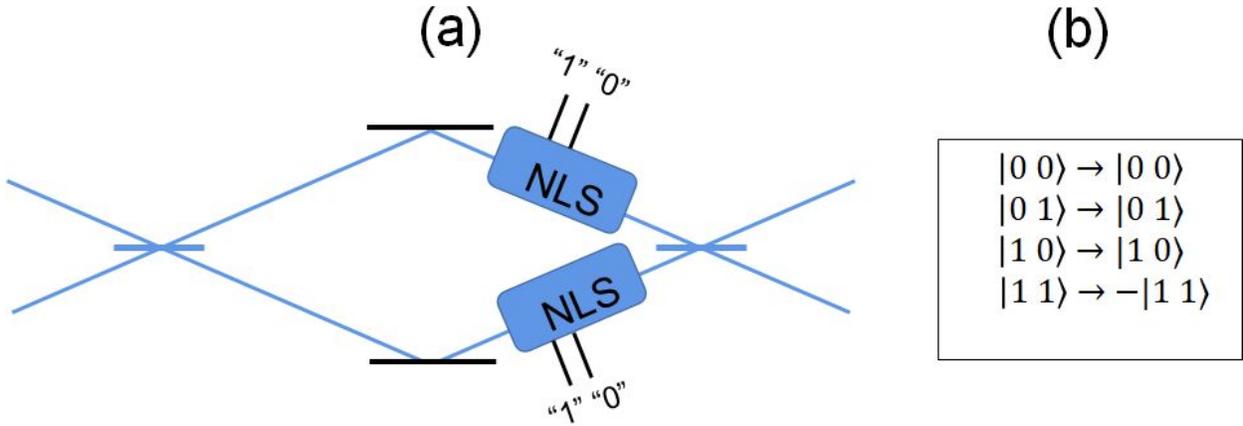


图 9. Controlled π gate based on HOM effect and nonlinear sign gates.

B. 线性量子计算框架

可以证明,对于如图 (6) 的线性网络,如果输入为单光子态,则由单个模式内光场量子态在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 空间的任意控制 (由可调分束器即可完成), 结合两个模式间的控制相位门操控 (图 (9)), 可将模式光场量子态操控到 2^n 维希尔伯特空间中的任意态 - 当然, 如果允许更高激发的多光子态, 则维度更大。对高维希尔伯特空间的可控探索是量子计算的关键。

图 (10) 给出最基本的线性量子计算框架, 为方便形象的描述, 我们将光路分成 N 层。

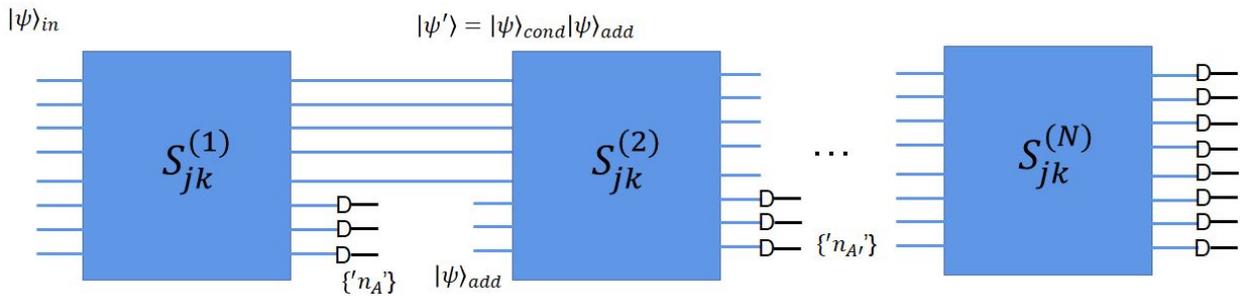


图 10. Schematic of a linear-optical quantum computing framework.

C. 线性光学量子计算的技术困难

如图 (2), 如果我们的宇宙只有真空及这些线性光学元件, 那么我们完全可以重新计算光场的模式函数 \mathcal{E}_j 并在新的模式函数下, 由第 (IA 2) 小节的方法量子化我们的光场。在新的本征模式函数下, 所

有模式都独立演化，因此线性量子光学的内禀性质似乎复杂不到哪儿去？这个直觉不见得是对的。光场量子态在不同模式下的变换并在特定基矢展开，这个数学过程可能极具复杂性。例如接下来我们要介绍，如图 (11) 的输入输出模式，对特定输入 Fock 态，输出态的 Fock 态展开系数实际上牵涉到一类“玻色采样”问题，对于大 n 的线性光学系统即较多光子数来说，无法由经典计算完成。而即使在 $n = 2$ 的情况下，也可以有 Hong-Ou-Mandel 的奇妙量子效应 (图 (7))。另一方面，在引入光子测量后，我们发现条件量子态 – 在部分输出端的光子读数确定的情况下另一些没有被监控的输出端光子态 – 可以用来模拟光子-光子相互作用，这样形成“非线性量子门” (图 (8)(5))。结合单光子态本身的操控，原则上可以形成基于线性光学的通用量子计算 (图 (10))。

如此简单的构架可以形成如此复杂的计算结构和应用是令人震撼的。在基于线性光学和测量的“量子态操控”，“量子计算”方面，我们人类进展到哪一步了呢？最多只能算“刚刚起步”，在巨大的希尔伯特空间中，人类可以控制的量子态占据的“体积”可能小于沧海中的一滴水。

1. 光学损耗

问题出在哪儿？最大的问题是光损耗。接下来在第 8 讲我们会讨论光损耗过程。我们发现了一个关键物理图像：光损耗分两步走，其中第一步是相干分束，第二步是光子以我们不关心的方法湮灭。而第一步就必然导致我们关心的量子态和损耗通道入射暗端 d 混合。即使 d 是真空态，也可能导致高度复杂量子态的量子性质严重退化。对于 $n \times n$ 线性光学系统来说，这样的损失不仅存在于光传输过程的吸收，也存在于每一个不完美的输入输出耦合及探测过程，难以避免。

2. 线性光学变换下量子态保真度

除损耗外，这儿我们提一下另一个看似简单的技术问题：我们无法保证线性光学系统本身的性质是“完美”地按照设计运行，控制误差总是存在。那么，此类参数误差如何影响我们对光场量子态的操控和刻画呢？

举例来说，我们希望应用的非线性符号门实现光子态操控，我们需要保证分束器的性质严格按照设计： $\theta = 61.5^\circ$, $\phi = 150.5^\circ$ 。实际操作中，如果 θ, ϕ 并非设计数值，则该类量子门的输出就会不理想。

我们定义一个“保真度”来刻画量子态操控的不理想。如图 (10) 所示， $n \times n$ 的线性光学系统 $S_{jk}(P)$ 是参数 P 的函数。我们记参数稍微变化下的变换矩阵为 $\tilde{S}_{jk} = S_{jk}(P + \delta P)$ ，由于人类未知的参数变化，算符的实际变换为

$$\tilde{a}_l^\dagger = \sum_j S_{ml}^*(P + \delta P) b_m^\dagger$$

因此，“真实”量子态为 $|\psi\rangle_{\text{out}} = f(\tilde{a}_l^\dagger)|V\rangle$ 。

由于无知，我们只能用预期参数下的变换矩阵来估计输出量子态，为 $|\tilde{\psi}\rangle_{\text{out}} = f(a_k^\dagger)|V\rangle$ 。该量子态估计误差可以用“保真度” \mathcal{F} 来描述：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(P, P + \delta P) &= |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|^2 \\ &= |\langle V | f(\tilde{a}_l^\dagger)^\dagger f(a_k^\dagger) | V \rangle|^2 \end{aligned} \quad (52)$$

对包含多体量子纠缠特性的量子态来说，这儿 $\mathcal{F} \propto e^{-A\delta P}$ 常常是随参数 P 指数衰减的。而参数 $A = A(|\psi\rangle)$ 和待刻画量子态的量子性质相关： $n \gg 1$, $|\psi\rangle$ 多模纠缠下 A 更大，衰减常常更快。此类保真度衰减是量子控制理论和量子混沌理论交叉领域的重要研究课题，在此无法展开。然而可以证明，无论是

上述损失导致的量子态退化，还是此处参数 P 变化导致的保真度下降，均可以由精巧设计的光路，结合探测，以条件量子态进行“量子纠错”，抑制误差在线性光路的指数积累。这样的纠错，原则上来说可以在小规模的光路展开，在 \mathcal{F} 足够接近 1 时，所需资源随 n 仅以幂次增长（而非指数增长），因此具有可操作性。

在 KLM 于 20 年前论证可行性以后，随着单光子光源技术和高效光子探测器技术的发展，基于线性光学的量子计算仍是人类在量子计算方面寻求突破的重要方向之一。然而在没有量子纠错以前，由于线性光学光路存在无法避免的损耗及参数误差，基于线性光学系统的量子态操控技术会一直有很大的局限。

D. Boson 采样

在实现通用量子计算以前的重要一步，是首先验证量子体系的“优越性”，在量子光学领域，一个重要的案例是玻色采样技术，由美国 University of Texas Austin 的 Scott Aaronson 等在 2013 年提出。图 (11) 给出玻色采样基本方案

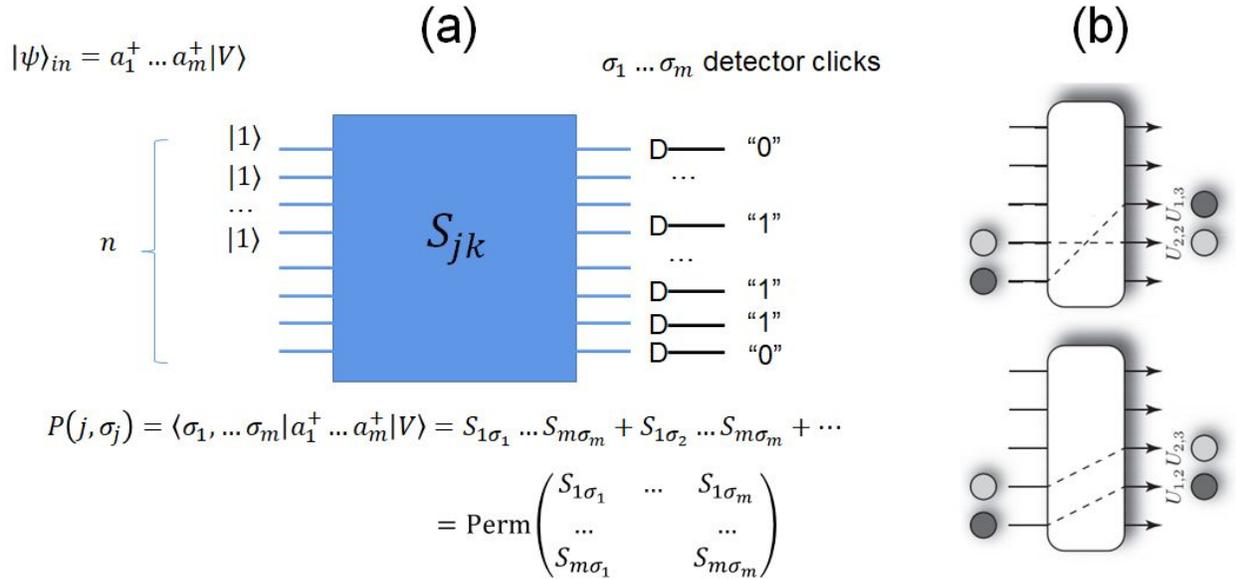


图 11. Schematic of Boson sampling. (a) An $n \times n$ linear optical network with transfer matrix S_{jk} . Input state is a m -port m -photon state. The task is to calculate the probability of $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ output port to "click". The probability $P(j, \sigma_j)$ is related to "permanenet" of submatrix. The full distribution is computationally difficult. (b) A example of 2 input photons detected at 2 outputs.

而实验方面，即使是这个“优越性展示”实验，也存在巨大的技术困难。这方面，我国科学家陆朝阳，潘建伟团队做出了开创性的工作，其构建的“九章”光量子计算系统性能位于世界前沿，感兴趣的同学可以调研一下。

我们考察一个分束器， $|r|^2 + |t|^2 = 1$ ，但是 $|r|^2 \ll 1$ (几乎完全透过)。同时考察入射光子态为

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = e^{\alpha_0 a_2^\dagger - h.c.} f(a_1^\dagger) |V\rangle$$

即端口 2 是“亮”输入，相干态 $|\alpha_0|^2 \gg 1$ ，这样的输入，在“暗端口” 1 的输出是 $\beta = r\alpha_0$ 。我们接下来考虑 $r \rightarrow 0$, $\alpha_0 \rightarrow \infty$ ，但是 β 保持恒定的极限。

我们可以写出输出态：

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{out}} &= e^{\alpha_0 t b_2^\dagger - h.c.} e^{\alpha_0 r b_1^\dagger - h.c.} f(t b_1^\dagger - r^* b_2^\dagger) |V\rangle \\ &\approx |\psi_{\text{out}1}\rangle |t\alpha_0\rangle \end{aligned}$$

对于 port 1 来说，输入的任意光子态 $f(a_1^\dagger) |V\rangle$ 被相空间移动为 (由此前讨论，不失一般性，我们约定透射相位为零，因此有 $t \approx 1$)：

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{out}1}\rangle &= e^{\beta b_1^\dagger - \beta^* b_1} f(b_1^\dagger) |V\rangle, \\ &= D(\beta) |\psi_1\rangle \end{aligned} \tag{54}$$

其中相空间移动幅度 $\beta = r\alpha_0$ 。

B. “暗端”输出场的正交分量测量

接下来，我们考察 port1 输出的光子数测量

$$\begin{aligned} &\langle \psi_1 | D^\dagger(\beta) b_1^\dagger b_1 D(\beta) | \psi_1 \rangle \\ &= \langle \psi_1 | (\beta^* + b_1^\dagger)(\beta + b_1) | \psi_1 \rangle \\ &= |\beta|^2 + \sqrt{2}|\beta| \langle \psi_1 | x_\beta | \psi \rangle + \langle \psi | b_1^\dagger b_1 | \psi_1 \rangle \\ &\approx |\beta|^2 + \sqrt{2}|\beta| \langle \psi_1 | x_\beta | \psi_1 \rangle \end{aligned}$$

上述最后一步，我们假设输入光子态 $|\psi_1\rangle$ 的光子数很少， $\langle \psi_1 | b_1^\dagger b_1 | \psi_1 \rangle \approx \langle \psi_1 | a_1^\dagger a_1 | \psi_1 \rangle \ll |\beta|^2$ 。此外，我们定义了正交分量：

$$x_{\beta,b} = \frac{1}{\sqrt{2}|\beta|} (\beta^* b_1 + \beta b_1^\dagger) \tag{55}$$

因此，对 port1 的光子数监控可以获得 $x_{\beta,b}$ 的期待值：

$$\bar{x}_{\beta,b} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{n}_1}{|\beta|} - |\beta| \right)$$

事实上，不仅是平均值，由于 $\langle \psi | b_1^\dagger b_1 | \psi \rangle \ll |\beta|^2$ ，所有的高次矩都可以近似：

$$\langle \psi | (b_1^\dagger b_1)^m | \psi \rangle \approx \langle \psi | (|\beta|^2 + \sqrt{2}|\beta|x_{\beta,b})^m | \psi \rangle$$

因此，对 b_1 端的光子数测量相当于对正交分量 $x_{\beta,b}$ 的测量：

$$x_{\beta,b} \approx \frac{b_1^\dagger b_1 - |\beta|^2}{\sqrt{2}|\beta|}. \tag{56}$$

1. 输入光场正交分量的平衡内差测量

基于式 (54)(56) 的正交分量 x_β 测量方法, 需要精确去除 $|\beta|^2$ 这个本底。现实生活中, $\beta = r\alpha_0$

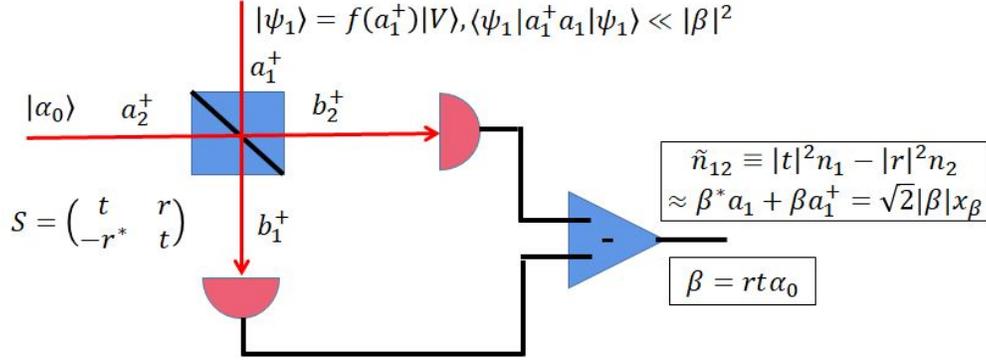


图 13. A generalized homodyne detection of x_β quadrature.

总会因为激光功率涨落等原因存在技术噪声。一个方便的降噪方法, 是同时监控 port2 (亮端口) 的输出并近似 $|\alpha_0|^2 \approx n_2/t^2$ 。这个方法比较大的问题是端口 2 的光强测量也会有光散粒噪声, $\Delta n_2 = |t\alpha_0|$ 。因此, 对 β 的估计会有一个散粒噪声极限:

$$\Delta|\beta| = \frac{|r|}{2t}$$

。除非是 $|r|^2 \rightarrow 0$ 的极限下, 这个额外涨落会导致 $f(x_\beta)$ 分布函数测量被展宽。而在大 $|r|^2$ 情况下, 避免这个展宽的方法是综合 n_1, n_2 的信息, 而不只是看 port1。

具体来说, 在正交分量 x_β 测量方面, 图 (12) 方法的推广是如图 (13) 的平衡内差探测。考虑一般的分束器, 只需要 $|r|^2 + |t|^2 = 1$, 那么我们总可以将输出光场的光子计数做电信号处理。具体来说, 由于

$$\begin{aligned} n_1 &= (ta_1^\dagger + ra_2^\dagger)((ta_1 + r^*a_2)) \\ &= |t|^2 a_1^\dagger a_1 + |r|^2 a_2^\dagger a_2 + (rta_2^\dagger a_1 + h.c.) \\ n_2 &= (-r^*a_1^\dagger + ta_2^\dagger)((-ra_1 + ta_2)) \\ &= |r|^2 a_1^\dagger a_1 + |t|^2 a_2^\dagger a_2 - (rta_2^\dagger a_1 + h.c.) \end{aligned} \quad (57)$$

由于我们预期 \mathcal{E}_2 端口的光强较强, 因此构建如下差分算符:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{12} &= |t|^2 n_1 - |r|^2 n_2, \\ &= rta_2^\dagger a_1 + r^*ta_2 a_1^\dagger + (|t|^4 - |r|^4)a_1^\dagger a_1 \\ &\approx rta_2^\dagger a_1 + h.c. \end{aligned} \quad (58)$$

上市中最后一行近似, 对于 50-50 分束器来说自然是严格的。而对于不是 50-50 分束, 考虑输入态 $|\psi\rangle_{\text{in}} = |\psi_1, \alpha_0\rangle$, 如果 $\beta = rt\alpha_0$ 足够大, 由于 $\langle a_1^\dagger a_1 \rangle$ 很小, 也问题不大。

我们可以近似有:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{12} &= \beta^* a_1 + \beta a_1^\dagger, \\ &= \sqrt{2}|\beta|x_\beta \end{aligned} \quad (59)$$

其中我们定义了正交分量

$$\begin{aligned} x_\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}|\beta|}(\beta^* a_1 + \beta a_1^\dagger) \\ p_\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}|\beta|i}(\beta^* a_1 - \beta a_1^\dagger) \end{aligned} \quad (60)$$

是量子光场沿着 β 方向的正交 x, p 分量。

不同于式 (56), 在式 (59) 中 β 不再需要被当作背景减掉, 而只是一个比例系数, 其大小可以有 $n_1 + n_2$ 的测量值 $\langle n_1 + n_2 \rangle = |\alpha_0|^2$ 来估计。

最后三个小知识点:

1) 图 (13) 需要做信号数值处理, 包括对 D1 的输出做乘法: $|t|^2 n_1$, 对 D2 的输出做乘法, $|t|^2 n_2$, 然后相减。这个过程当然是经典过程。对于 $|\beta|^2$ 较大, 较多光电子的情况, 此类经典处理带来的电子线路噪声常常可以忽略不记。随着高速电路, 高速计算的发展, 一个更加直接的数据处理方法是直接对 n_1, n_2 读数进行模-数转换, 然后用数字计算的方法获得 \tilde{n}_{12} 。

这儿需要注意的是, 单次处理结果对应于量子力学算符 \tilde{n}_{12} 的单次测量值。

2) 严格意义上来说, 平衡内差要求 $|t|^2 = |r|^2 = 1/2$, 此时 $\tilde{n}_{12} = \frac{1}{2} n_{12}$ 可以由模拟减法电路对双探测器做减法, 直接获得。同时式 (58) 里面最后一项也被消除了。然而这一项在入射光场 $|\psi\rangle$ 小光子数极限下即使不被消除也没啥大问题。因此, 在拥有对光电信号进行高速处理能力后, 严格平衡就不是特别重要了。

3) 同学们会常常遇到“外差”测量。内差 = homodyne, 外差 = heterodyne。这些名词都是从无线电通讯领域发展起来的。在无线电通讯领域, 相干态 $|\alpha_0\rangle$ 注入端的作用相当于一个“局域振子”, “外差”测量的意思, 是局域振子的性质和信号有所不同。常常是频率不同。具体到光学外差测量, 则是说 $\alpha_0 \rightarrow \alpha_0 e^{i\delta t}$ 以外差频率 δ 扫描, 而接受端电子线路对收集信号 n_1, n_2 以 δ 为调制频率解调, 最后获得不同相位下的 x_β 。在此类运用中, “外差”方法只是微波和无线电技术, 然而因为测量过程常常有低频 $1/f$ 噪声, 把信号调制到 δ 高频常常是抑制此类噪声的有效手段。

C. 分束光强测量的散粒噪声即暗输入端口的真空涨落

我们考虑图 (13) 中的输入态 $|\psi_1\rangle = |V\rangle$ 。因为端口 2 是相干态, 很容易有:

$$\bar{n}_1 = |r|^2 |\alpha_0|^2 = \sin^2 \theta |\alpha_0|^2$$

$$\bar{n}_2 = |t|^2 |\alpha_0|^2 = \cos^2 \theta |\alpha_0|^2$$

这儿我们还借用式 (29) 对分束器以转动角 θ 参数化。

这样的测量当然是有噪声的, 相干态的噪声是泊松分布, 很容易写出来:

$$\Delta n_1 = \sqrt{\bar{n}_1} = |\sin \theta \alpha_0|$$

$$\Delta n_2 = \sqrt{\bar{n}_2} = |\cos \theta \alpha_0|$$

我们可以考察 \tilde{n}_{12} :

$$\begin{aligned}\bar{n}_{12} &= |t|^2 \bar{n}_1 - |r|^2 \bar{n}_2 = 0, \\ \Delta \tilde{n}_{12} &= \sqrt{|t|^4 \Delta n_1^2 + |r|^4 \Delta n_2^2} = \sin(\theta) \cos(\theta) |\alpha_0| = \sqrt{2} |\beta| \Delta(x_\beta)_V.\end{aligned}\tag{61}$$

由式 (60), $\Delta(x_\beta)_V = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 是归一化后正交分量的真空涨落大小。

显然的是, 由于我们已经知道 $\tilde{n}_{12} = \sqrt{2} |\beta| x_\beta$, 式 (61) 计算完全可以一步到位, 而无需运用相干态散粒噪声特性。

D. 分束光强测量标定分束器反射率

我们可以通过 \tilde{n}_{12} 测量来推测分束器反射率, 为此, 我们需要首先有一个预估:

$$\tilde{n}'_{12} = \cos^2 \theta_0 n_1 - \sin^2 \theta_0 n_2$$

其中 θ_0 和我们预期的 θ 接近, 那么有

$$\begin{aligned}\langle \tilde{n}'_{1,2} \rangle &= (\sin^2 \theta \cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta \sin^2 \theta_0) |\alpha_0|^2 \approx \sin(2\theta_0) \sin(\theta - \theta_0) |\alpha_0|^2, \\ \Delta \tilde{n}'_{12} &= \sqrt{\cos^4 \theta_0 \sin^2 \theta + \sin^4 \theta_0 \cos^2 \theta} |\alpha_0| \approx |\cos \theta \sin \theta \alpha_0|\end{aligned}\tag{62}$$

我们因此有:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta(\langle \tilde{n}'_{12} \rangle) \approx \theta_0 + \frac{\langle \tilde{n}'_{12} \rangle}{\sin(2\theta_0) |\alpha_0|^2}, \\ \Delta \theta &= \frac{\Delta \tilde{n}'_{12}}{\partial_\theta \langle \tilde{n}'_{12} \rangle}, \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}\end{aligned}\tag{63}$$

其中 $\bar{n} = |\alpha_0|^2$ 为平均光子数。如果我们是激光做时长为 T 的测量, 光子计数的量子效率为 Q , 那么有

$$\Delta \theta = \frac{1}{2\sqrt{QPT/\hbar\omega}}$$

E. 量子层析 – 一般量子态的全面测量方法

1. 魏格纳函数和量子层析方法

我们希望找到单模光场 \mathcal{E} 任意光子态 $|\psi\rangle = f(a^\dagger)|V\rangle$ 的测量方法。

既然是测量, 那么第一步, 是找到合适的观测量集合 $\{O_j, j = 1, \dots, M\}$ 。直觉上来说, 自然是观测量“越多越好”, M 很大。注意对于单模光场, 我们一定有 $O_j = O_j(a, a^\dagger)$ 。

接下来, 我们可以反复制备 $|\psi\rangle$, 对观测量 O_j 获得 $f(O_j)$ 分布函数。

最后, 我们期待可以用 $f(O_j), j = 1, \dots, M$ 这样 M 个实分布函数来重构希尔伯特空间的态矢量 $|\psi\rangle$ 。

注意到从第 3 讲, 我们知道魏格纳函数和系统的态矢量是一一对应的:

$$w(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^2\beta \langle \psi | e^{\beta^*(\alpha-a) - \beta(\alpha^* - a^\dagger)} | \psi \rangle$$

更加一般的，对于混合态来说

$$w(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^2\beta \text{trace}(\rho e^{\beta^*(\alpha-a) - \beta(\alpha^* - a^\dagger)})$$

2. 边缘分布函数

单模光场的魏格纳函数是 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)$ 的复变函数 (这儿 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 为了归一化方便)。从第 5 讲我们已经知道，对其中一个正交分量，例如 p 积分，获得分布函数 $f(x)$ 正是对算符 \hat{x} 测量的分布函数。

一般来说，我们可以以 ϕ 角度转动 $w(x, p)$ 的正交坐标 x, p 。为了和接下来的记号一致，我们记 $\phi = \arg[\beta]$ ，考虑 $x_\beta = x\cos(\phi) + p\sin(\phi)$ ， $p_\beta = p\cos(\phi) - x\sin(\phi)$ 。并考虑正交观察量：

$$\begin{aligned}\hat{x}_\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}|\beta|}(\beta^*a + \beta a^\dagger) \\ \hat{p}_\beta &= \frac{1}{i\sqrt{2}|\beta|}(\beta^*a - \beta a^\dagger)\end{aligned}\quad (64)$$

那么 (第 5 讲)：

$$f(x_\beta) = \int w(x_\beta, p_\beta) dp_\beta \quad (65)$$

$f(x_\beta)$ 称为 $w(\alpha, \alpha^*)$ 的边缘分布函数。魏格纳函数的上述性质，和经典相空间分布函数 $w_c(x, p)$ 是完全一致的。

3. 从边缘分布函数重构魏格纳函数

我们可以进一步对 $f(x_\beta)$ 做傅里叶变换， $F(P_\beta) = \mathcal{F}[f(x_\beta)]$ ，那么，从式 (65) 可以显而易见的发现，

$$F(P_\beta) = W(P_\beta, X_\beta = 0) \quad (66)$$

其中 $W(P_\beta, X_\beta) \equiv \mathcal{F}^{(2)}[w(x_\beta, p_\beta)]$ 是魏格纳函数 $w(x_\beta, p_\beta)$ 的二维傅里叶变换。

因此，式 (66) 的意思是说，在 $f(x_\beta)$ 分布函数的精确测量后我们可以通过傅里叶变换获得量子态魏格纳函数 $w(x_\beta, p_\beta)$ 在傅里叶空间里面穿过零点的一条线， $X_\beta = 0$ 。可以想象，如果我们以小步长来扫描 $\phi = \arg[\beta]$ 角度，那么这些过“倒相空间”零点的线可以连成一个面，使我们获得 $W(P_\beta, X_\beta)$ 的几乎全部信息。接下来我们就可以由反傅里叶变换获得 $w(x, p)$ 。这样的边缘函数到分布函数的逆变换在医学领域应用很广泛，叫 (逆)Radon 变换，用于基于 X-射线成像的 Computerized Tomography (CT) 等等。

题外话：在前期课程中已经提到，物理学界公认的光场”最经典“的量子态是 Glauber 相干态 $|\alpha_0\rangle$ ，其魏格纳函数是 $w = \frac{1}{2\pi} e^{-2|\alpha - \alpha_0|^2}$ 。此外，我们可以计算出热态的魏格纳函数， $w = \frac{1+\bar{n}}{2\pi(1+2\bar{n})} e^{-|\alpha|^2/(1+2\bar{n})}$ ，也是”相当经典“的。

一般来说，判断一个量子态是否”经典“，一定要和观测对应起来。魏格纳函数提供了重要标准。

我们知道，边缘分布函数是观测量 \hat{x}_β 的测量概率函数，因此是非负的， $f(x_\beta) = \langle x_\beta | \rho | x_\beta \rangle \geq 0$ 。通过上述逆 Radon 变换，可以反推 $w(\alpha, \alpha^*)$ 。注意 $w(\alpha, \alpha^*)$ 不见得是正定的。对于存在 $w(\alpha, \alpha^*) < 0$ 的量子态，其负值区间当然是非经典的 – 用经典概率分布来说的话，就是系统在相空间 (x_0, p_0) 处附近出现的概率是负数，因此完全不符合经典逻辑 (见图 (14) 案例)。

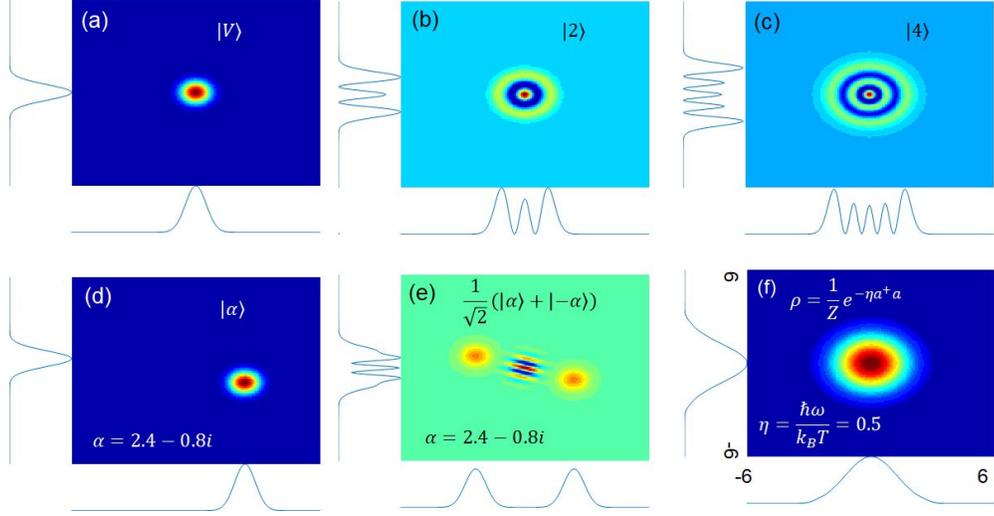


图 14. Wigner distribution $w(x,p)$ and the associated marginal distribution $f(x),f(p)$

F. 基于光学内差方法的量子层析

由上述小节讨论我们知道，对于任何单模量子态 $|\psi\rangle$ ，如果我们可以实验中构造观测量 x_β ，通过反复制备 $|\psi\rangle$ ，大量测量，获得 $f(x_\beta)$ 分布，进而不断改变 β 的相位 ϕ ，那么就可以反向构造出量子态的魏格纳函数。

最后我们用图 (15) 总结本小节。

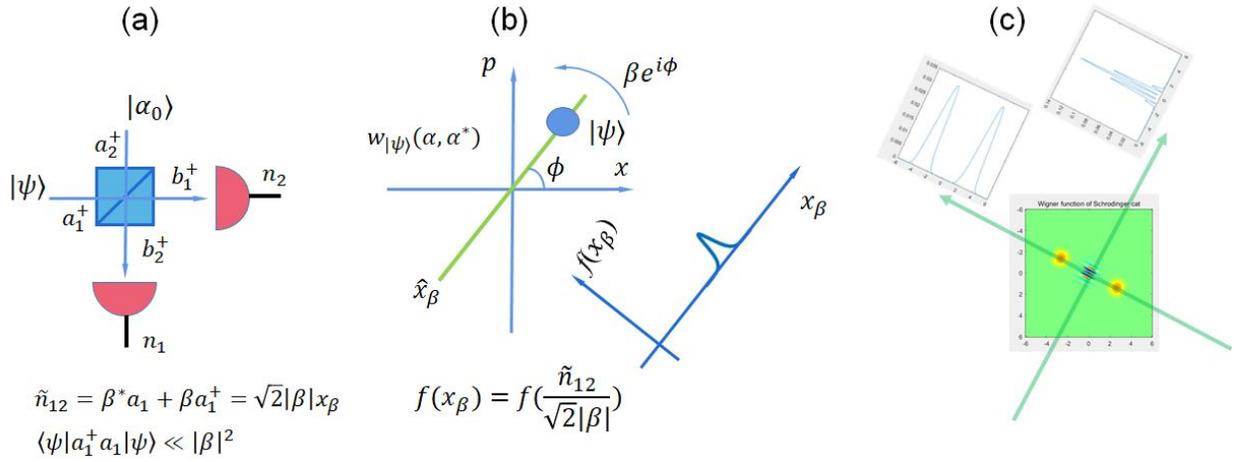


图 15. Quantum state tomography

G. 相干态相位测量

以上图 (15) 可以处理任何满足图示要求的单模光场量子态 $|\psi\rangle$ 。只要光子数足够小就行，没有其任何预设条件。可以想象，这样的量子层析需要大量重复测量获得足够多的数据：为了在每个角度上对 $f(x_\beta)$ 获得足够高的信噪比，需要重复 N_m 次（具体大小由 $f(x_\beta)$ 结构及信噪比需求决定），而根

据 Radon 变换需要得相空间解析度 (和预期 $w(\alpha, \alpha^*)$ 有多复杂有关), 需要有 M 次测量, 因此总测量次数是 $N_m \times M$ 次, 即使是对于很小光子数的光子态, $N_m \sim 10^4$, $M \sim 10^2$ 也常常是需要的。

另一方面, 如果我们已经预知了 $|\psi\rangle$ 的形式, 那么测量过程就可以大大简化了。这儿我们考虑一大类预制光子态形式, 相干态 $|\alpha\rangle$ 。很显然, 测量 $|\alpha\rangle$ 只需要知道两个数: $\alpha_r = \text{Re}[\alpha]$, $\alpha_i = \text{Im}[\alpha]$, 或者是 $|\alpha|$ 以及 $\phi = \arg[\alpha]$ 。这一节我们着重考虑相位测量。

我们考察 $|\psi\rangle = D(\alpha)|V\rangle$, 在如图 (15) 的 homodyne 设备中, $\beta = r\alpha_0$, $|\beta|^2 \gg |\alpha|^2$, 我们的任务是估计 $\phi = \arg[\beta^*\alpha]$ 。相干态的测量非常好推导, 下面我们直接运用式 (56) 推导相位估计。我们有:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{n}_{12} \rangle &= \sqrt{2}|\beta|\sqrt{2}|\alpha|\cos(\phi) = 2|\beta||\alpha|\cos(\phi), \\ \Delta \tilde{n}_{12} &= \sqrt{2}|\beta|\Delta x_\beta = |\beta|.\end{aligned}\tag{67}$$

因此,

$$\begin{aligned}\phi &= 2n\pi \pm \arccos\left(\frac{\langle \tilde{n}_{12} \rangle}{2|\alpha||\beta|}\right), \\ \Delta\phi &= \frac{\Delta \tilde{n}_{12}}{\partial_\phi \langle \tilde{n}_{12} \rangle} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}\sin\phi}\end{aligned}\tag{68}$$

其中 $\bar{n} = |\alpha|^2$ 是待测弱相干态的平均光子数, $\bar{n} \ll |\alpha_0|^2$ 。

式 (68) 也可以写为:

$$\Delta\phi \geq \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}\tag{69}$$

式 (68)(69) 表达了相干态相位测量的光散粒噪声极限。这样的测量不确定度, 事实上是由于 ϕ 本身不确定造成的, 用魏格纳函数很容易表达, 见图 (16)。对于相干态来说, 我们总有

$$\Delta\phi_\alpha = \frac{1}{2|\alpha|}\tag{70}$$

而这儿 $\phi = \phi_\alpha - \phi_\beta$ 。可是 $\Delta\phi_\beta \ll \Delta\phi_\alpha$, 所以 $\Delta\phi$ 由 $\Delta\phi_\alpha$ 决定。从测量的角度, 如果相对角度 $\phi \approx \pi/2$ 选得对, 那么测量的不确定度 $\Delta\phi$ 可以逼近 $\Delta\phi_\alpha$ 。

这儿我们同时注意到相干态的相对相位测量, 选取相位角 ϕ 还是很重要。可以结合 x_β 测量的魏格纳函数相空间表示, 理解一下为何如此。

H. 光子数-相位的不确定关系

如式 (69) 的关系是类似于海森堡不确定关系的原理性不等式吗? 注意到对于相干态来说, $\Delta n = \sqrt{\bar{n}} = |\alpha|$, 因此式 (69) 也可以写为,

$$\Delta\phi\Delta n \geq \frac{1}{2}\tag{71}$$

式 (71) 是相位和光子数的海森堡不确定关系, 适用于所有光场量子态 $|\psi\rangle$, 因此比式 (68)(69) 更加普遍。而在接下来第 (VII E) 小节, 我们会发现式 (68)(69) 的相位测量精度的光散粒噪声极限可以由引入多光子纠缠打破。

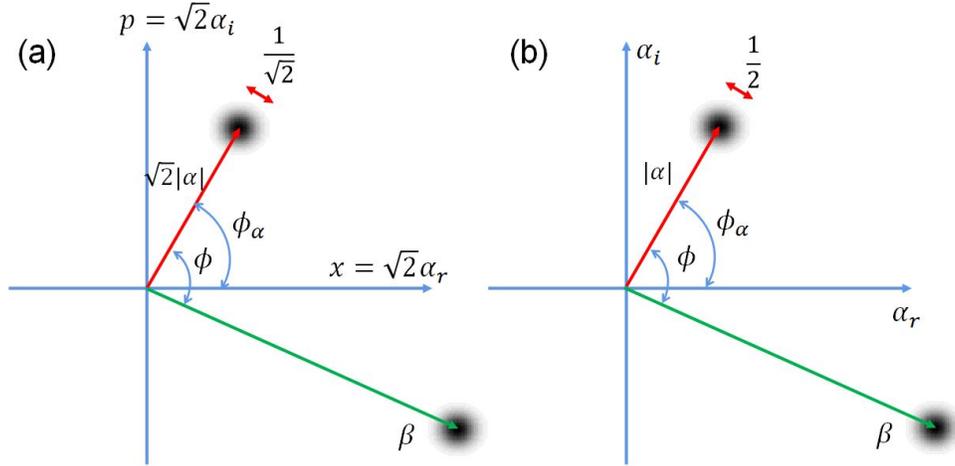


图 16. The phase-space representation of homodyne phase angle ϕ measurement. (a) The phase space distribution $w(x, p)$ in $x - p$ coordinate. (b) The phase space distribution $w(\alpha, \alpha^*)$ in the complex α plane.

I. 微波通讯和激光锁相

上述运用分束器对待测光场的相干态 $|\alpha\rangle$ 和参考光场相干态 $|\alpha_0\rangle$ 混合, 进而获得相对相位 ϕ 信息的内差测量方法, 事实上在微波通讯领域被大量应用。例如, 我们每个人的手机内都有一个“局部振子”(一般来说是时钟 + 频率合成器 + 微波放大器构成), 在通讯“载波”频段产生 $E_{loc}(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ 的相干振荡。基地站的微波信号, 被手机天线接受并放大后, 在信号电路形成待测 $E_s(t) = A(t)(\omega t + \phi(t))$ 信号。由混频器比较, 低通滤波, 可以测量信号 $A(t), \phi(t)$ 。其中如果信号被编码到 $\phi(t)$, 叫做调相 (PM) 信号, 或者调频 (FM) 信号, 而如果信号编码到 $A(t)$ 则被称为调幅 (AM) 信号。当前的无线和微波通讯, 大多情况下是 PM/FM 信号。注意到无论是手机内的局域振子信号, 还是接受的微波信号, 均是电磁波的相干态, 因此我们上述关于相位测量的分析都是相关基础物理。需要注意的是微波波段的光子能量远小于室温, 因此, 微波通讯的噪声常不以散粒噪声为主, 而是热噪声。只有当微波电路处在低温环境下, 如超导电路, 微波散粒噪声才会主导。

另一方面, 在光学波段的激光锁相也运用到相干态的相位比较。多激光的主动相位锁定技术在基础和实际应用领域有非常重要的应用, 举例来说:

- 1) 基于星载超稳激光的引力波测量 (LISA, 天琴)
- 2) 多激光的相干单模合束, 形成极高功率激光输出。
- 3) 频率间隔一定, 相位稳定的激光输出阵列, 可以用于实现对原子/分子状态的高精度相干操控。

VII. 基于相干态注入线性干涉仪的精密测量

上面第 VID 节关于分束器后端测量, 为本节做了绝好的铺垫。有了上述相关论述, 目前我们只需要注意式 (36), 2×2 干涉仪的转换矩阵是 2×2 的形式, 只是转角 $\theta \rightarrow \phi/2$, 而 ϕ 是两个干涉臂之间的相对相位移动。和式 (63) 推导类似, 考察图 (17)a) 的马赫-曾德干涉测量, 我们马上有:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi(\langle \tilde{n}'_{12} \rangle) \approx \phi_0 + \frac{\langle \tilde{n}'_{12} \rangle}{\sin(\phi_0)|\alpha_0|^2}, \\ \Delta\phi &= \frac{\Delta\tilde{n}_{12}}{\partial_\phi \langle \tilde{n}'_{12} \rangle}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}\tag{72}$$

当然，我们可以调节相位 ϕ ，使得 $\sin(\phi/2) \ll 1$ 并且观测“暗端口” n_1 (图 (17c)，由于 $\langle n_1 \rangle = \sin^2(\phi/2)|\alpha_0|^2$ ，结合相干态光强测量的 $\Delta n = \sqrt{n}$ 规律，我们也可以立刻得到：

$$\begin{aligned}\phi &= \phi(\langle n_1 \rangle) = 2n\pi \pm \arccos\left(1 - \frac{\langle n_1 \rangle}{|\alpha_0|^2}\right), \\ \Delta\phi &= \frac{\Delta n_1}{\partial_\phi \langle n_1 \rangle}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}|\cos(\phi)|} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}\tag{73}$$

上述关于干涉仪相位测量的计算，需要注意：

1) 如式 (73)，如果干涉测量只运用一个端口，而不是两个，那么测量端口需要是“暗端口”(图 (17c)，即几乎没有光输出的端口，才能达到散粒噪声极限。否则就必须运用如式 (72) 的平衡内差计算。

2) 我们发现式 (73)(72) 相对于相干态相对相位测量 (式 (68)) 差了两倍。并不特别奇怪，因为两种测量的物理量 ϕ 并不相同。然而我们还是试图“handwaving”的理解一下：此处干涉仪测量中的 ϕ 相位测量，实际上是图 (17)a 中 S_2 输出端对输入端的相位估计，而 S_2 的输入端光强是相等的 (S_1 是 50/50 分束)。因此，相比图 (16) 的情形，入射相干态的相位涨落本身就大了 $\sqrt{2}$ 倍。再者，干涉仪的传播相位 ϕ 可以认为只是被一路光“感知”到，另一路光被用来做参考光了，光子数损失一半，所以有另一个 $\sqrt{2}$ 。综合起来，对于入射平均光子数为 $|\alpha_0|^2$ 的相干态来说，其分辨干涉仪相位的能力，在光子散粒噪声极限下，比自身的相位精确性下降了 50%。

A. 吸收测量和相移测量

我们可以再理解一下式 (63)。

式 (63) 对应于测量一个反射率未知的分束器的反射率 $R = \sin^2\theta$ 。这个测量，其实也可以理解为测量某种从透射端“port-2”向反射端“port-1”散射的未知散射强度。另一方面，如果我们仅仅想测量透射端后面额某种吸收，也是可以的，很容易证明，如果吸收系数为 $A = |a|^2 \ll 1$ ，那么对于 50-50 分束器来说，其中一路的吸收系数 $|a|$ 测量精度是

$$\Delta|a| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

和式 (72) 一致。

然而需要注意的是，吸收率 $A = |a|^2 \in [0, 1]$ ，而相移 ϕ 却可以任意大。事实上，如图 (4) 的干涉仪，其干涉相移一般表达为：

$$\phi = kL_{1,2}\tag{74}$$

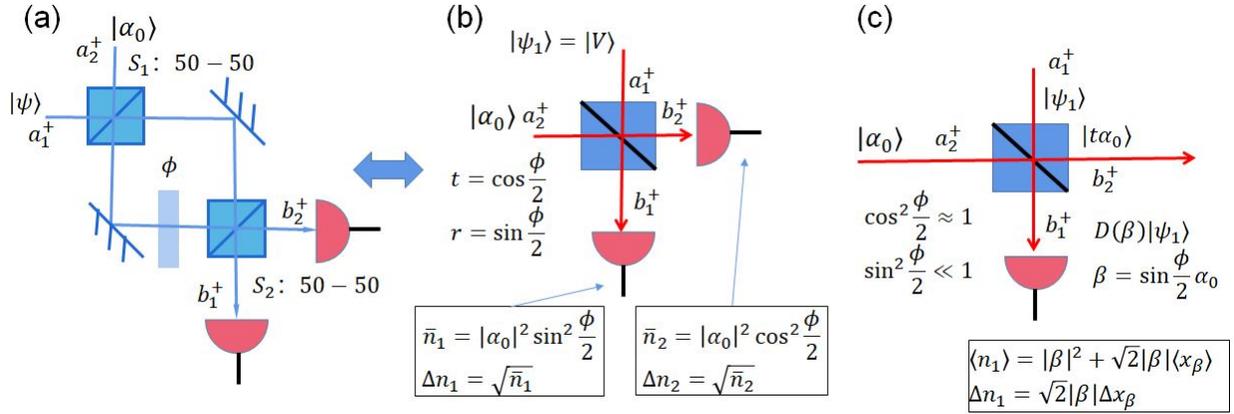


图 17. (a) A standard Mach-Zender interferometer. (b) The M-Z interferometer is a composite beam splitter with $t = \cos\phi$ and $r = \sin\phi$. By measuring $n_{1,2}$, the phase ϕ can be inferred with shot-noise limited resolution. (c) When the a_1^\dagger -port is injected with a general state $|\psi\rangle$, other than vacuum $|V\rangle$, then a very good way to understand the noise property is to “tune” ϕ so that $|r|^2 \ll 1$. In this case, almost all the ϕ -dependent information is retrieved from the dark port (b_1^\dagger). The shot noise $\Delta n_1 = |\beta|$ is generally expressed as $\Delta n_1 = \sqrt{2}|\beta|\Delta x_\beta$ for arbitrary $|\psi_1\rangle$ input.

其中 $L_{1,2} = L_1 - L_2$ 为两个干涉臂的光场差。我们一般有 $\phi = 2N\pi + \phi_{\text{off}}$ ，而 N 可以是一个很大的数，那么相对精度是，

$$\frac{\Delta L_{12}}{L_{12}} = \frac{\Delta\phi}{\phi} \sim \frac{1}{2N\pi\sqrt{\bar{n}}}$$

可以极端精确。因此，运用干涉相移来测量物理量是非常厉害的。

B. 观测量的干涉相移编码

实际生活中，我们常运用干涉仪的传播相位 ϕ 测量来监控某个实际运用物理量，例如：

1) 运用 M-Z 干涉仪监控气体密度 ρ ，考虑一个样品池，内有密度 ρ 气体，原子极化率为 α_r ，汽室长度为 L ，那么

$$\phi = nk_0L = \frac{2\pi L\sqrt{1 + \rho\alpha_r}}{\lambda}$$

2) 运用 Michealson 干涉仪测量臂长变化 L

我们有

$$\phi = 2\pi L/\lambda$$

3) 运用 Sagnac 干涉仪测量转动变化 Ω

$$\phi = 4\pi\Omega \cdot A/c\lambda$$

这些测量中，我们关系的物理量统称为 O 。干涉仪总是通过精巧的设计，将这些观测量编码到传播相位 $\phi = \phi(O)$ 中。通过 ϕ 测量实现对 O 的监控，同时有

$$\Delta O = \frac{\Delta n}{|\partial_\phi \langle n \rangle \partial_O \phi|}$$

显然，为了提高对观测量 O 的灵敏度，我们需要

1) 提高 $\partial_O \phi$ 。这个需要改善干涉仪结构。

2) 降低 $\Delta \phi = \Delta n / \partial_\phi \langle n \rangle$ 。这个需要改善光源和探测器性质。

以上我们已经知道，对于相干态光及理想探测器来说，

$$\Delta \phi = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (75)$$

考虑测量时间为 T ，激光功率为 P ，我们还可以写为

$$\Delta \phi = \frac{1}{\sqrt{PT/\hbar\omega}}$$

因此，最简单的提高相位分辨能力的方法，就是增大激光功率 P ，以及观测时间 T 。

观测时间 T 增加，是以降低测量“带宽”为代价的。例如，如果我们希望监控以 $\tau = 1 \text{ ms}$ 变化的反射镜振动，取决于振动形式，我们的观测时间可能需要设到 $T < \tau/2$ 。

另一方面，激光功率 P 增大有诸多限制，如激光功率本身的限制，激光对待测物及干涉仪本身的加热损伤限制，激光的光压扰动，等。

C. 以光干涉仪测引力波

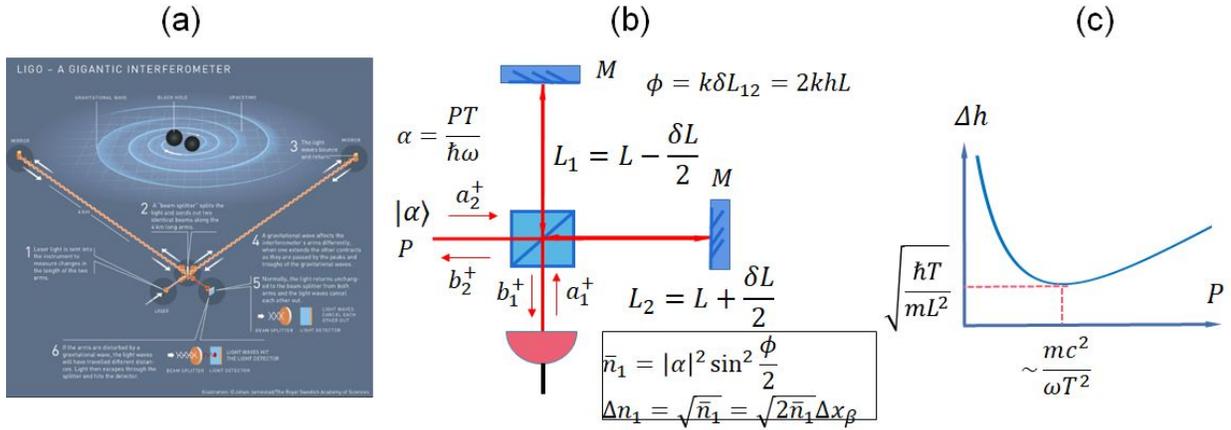


图 18. Light interferometric detection of gravitational wave. (a) is from Nobel prize website (Physics 2017) (b): simplified diagram. (c): Simplified relation for deciding optimal laser power P according to Eq. (79) to reach standard quantum limit to the gravitational strain detection.

引力波以光速传播，频率常在 Hz 级以下，时空涟漪以 $h(x, t)$ 描述，波长 λ_{GW} 巨大。对于地球上的垂直 Michelson 干涉仪 (图 (18))， $L \ll \lambda_{\text{GW}}$ ，引力波应变 h 导致的干涉臂长变化可以写为： $\delta L_1 = L_1 h$ $\delta L_2 = -L_2 h$ 因此有

$$\phi = k\delta L_{1,2} = hL4\pi/\lambda, \quad (76)$$

这儿 λ 是激光波长。

LIGO,2015 年人类首次探测到引力波, $h \sim 10^{-21}$ 级, 干涉仪臂长是 $L \sim 10^4\text{m}$ 级别, 因此, $\delta L \sim 10^{-17}\text{m}$ 级别, 比原子大小还小 7 个量级, 怎么测的?

我们考察图 (18b) 装置在 T 时刻内监控 Michaelson 干涉仪的臂长变化, 考虑到引力波 $h(t) = h_0 \cos(\omega_{\text{GW}}t)$ 是周期信号, 频率是 ω_{GW} , 在 $T \ll 1/\omega_{\text{GW}}$ 测量间隔内, 待测应变 $h(t)$ 几乎不变。我们考虑注入激光功率为 P , 则在 T 时刻内的激光注入可以认为是相干态 $|\alpha\rangle$ 注入, $\alpha = PT/\hbar\omega$, 由上小节讨论, 我们知道:

$$\begin{aligned} (\Delta h)_{\text{shot-noise}} &= \Delta\phi/|\partial_h\phi| \\ &= \frac{\lambda}{4\pi L} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{PT}} \end{aligned}$$

提高精度的方法包括增大 L , 增大 T , 降低 λ , 及增大 P 。

增大 L 的方法包括基于人造卫星及人造行星的干涉仪引力波探测计划。例如自上个世纪 90 年代以来, 欧洲一直在筹划的 LISA 计划。以及我国正在筹划的天琴计划等。

已经提及, 增大 T 最大的问题是降低了引力波探测器带宽。

降低探测激光的波长 λ 感觉是一个好主意。然而好的干涉仪需要好的光源和好的光学元件。目前人类在光源和光学元件方面做得最好的波长是近红外 (由光学材料的能带结构及机械性能决定)。

最后是增大激光功率 P , 这个努力方向上虽然也受到光源功率, 反射镜加热, 光损伤等各类限制, 但是各类技术突破已经可以让美国的 LIGO 镜面附近的光学功率达到 $P \sim 10^6 \text{ W}$, 这个时候, 一个重要的问题是光压对反射镜的反作用导致的位置涨落。

1. 辐射压力

我们已经知道, 光场能量算符可以表达为:

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k$$

而事实上, 光场动量算符写为:

$$\mathbf{P} = \sum_k \hbar\mathbf{k} a_k^\dagger a_k$$

对于进入干涉仪的单模光场来说, 相干态 $|\alpha\rangle$ 的光对后端反射镜的辐射压力可以写为:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= 2\langle\alpha|\mathbf{P}|\alpha\rangle/T \\ &= 2|\alpha|^2\hbar\mathbf{k}/T \\ &= 2|\alpha|^2\hbar\omega/cT \\ &= 2\frac{P}{c} \end{aligned}$$

注意到这儿因子“2”是因为反射镜将入射 \mathbf{k} 光反射为 $-\mathbf{k}$, 因此动量变化是两倍。这个光压力可以由悬挂反射镜的机械结构来平衡掉。

然而注意到 T 时刻内反射镜从光场获得动量是有涨落的,

$$\Delta p = 2\sqrt{\frac{P\hbar k T}{c}} \quad (77)$$

直观的说，就是辐射压力有散粒噪声涨落（见 Lecture4, 式 (41)）：

$$\Delta \vec{P} = 2\sqrt{\frac{P\hbar k}{cT}} \quad (78)$$

这个辐射压力随机涨落，是不能由预先设计的机械结构来平衡的。另一方面，为了避免和低频噪声共振，LIGO 的端镜悬挂系统的本征振动频率极低。我们简化讨论，考虑在 T 时刻内端镜沿着 L 方向的运动在平均平衡点附近近似自由，那么可以估计由于光压涨落造成的镜面位置涨落：

$$(\Delta L)_{\text{back-action}} \sim \frac{\Delta p T}{2m} = \frac{T}{m} \sqrt{\frac{P\hbar k T}{c}}$$

其中 $m = M/2$ 是两个反射镜的折合质量。

以下不做严格推导，我们综合 $(\Delta h)_{\text{shot-noise}}, (\Delta L)_{\text{back-action}}$ ，有

$$\Delta h \sim \sqrt{(\Delta h)_{\text{shot-noise}}^2 + (\Delta L/L)_{\text{back-action}}^2} \geq \sqrt{\frac{\hbar T}{mL^2}} \quad (79)$$

而最优值在激光功率 $P \sim \frac{mc^2}{2\omega T^2}$ 点附近取到。式 (79) 被称为引力应变 h 测量的标准量子极限，事实上对应于激光干涉进行自由物体位置测量的标准量子极限

$$\Delta L = \sqrt{\frac{\hbar T}{m}} \quad (80)$$

该极限综合了干涉仪读数上的光子散粒噪声及光压反作用导致的位置涨落，实际上也是海森堡测不准关系的体现。是否可以突破这个极限呢？我们注意到上述简要推导中假设的是相干态注入。而一个简单的思路是在更小的功率 P （及相应更小的辐射压力反作用）下突破相位测量的散粒噪声极限，这样人类就开始思考压缩态光场的应用。

D. 测量的反作用：位置测量的标准量子极限

在展开讨论压缩态以前，我们稍微提一下测量的“反作用”。式 (79)(80) 极限的根源，是激光的辐射压力造成的反射镜动量变化，进而导致了位置 L 涨落。不幸的是我们刚好就是测位置 L ，因此才有功率小了精度不够，功率大了反作用太大这个尴尬局面。为了理解这个反作用，我们需要把端镜运动自己的哈密顿量写出来，

$$H_M = \hat{p}^2/2m$$

我们发现待测量 $x = L_1 - L_2$ 实际上是和 $\hat{p} = p_1 - p_2$ 共轭的端镜运动量子力学位置变量： $x \rightarrow \hat{x}$ 。我们当然知道测量位置有测不准关系， $\Delta p \Delta x \geq \hbar$ 。而这儿我们发现 $\Delta x = \Delta L$ 遵循式 (80) 极限，本质上是因为 \hat{x} 作为量子力学变量不是守恒量： $\dot{\hat{x}} = \hat{p}/m$ 。

如果我们能直接测量镜子的动量，则情况会好很多。因为对于近似自由悬挂的镜子，有 $\dot{p} = 0$ 。这种情况下，我们可以进一步设计光路，让测量过程保持 p 为守恒量（让每个镜子感受到的光压导致的动量变化不影响我们测量所关心的相对运动 p ），那么，我们就可以任意增加激光功率，在极短时间内把动量测出来。

这个想法可以用如图 (4d) 的 Sagnac 干涉仪结构测转动来说明。不同于 Michaelson 干涉仪，Sagnac 干涉仪的镜面辐射造成的低频随机运动，对“顺时针”和“反时针”干涉臂的光程影响是完全相同的，

即不影响 $x = L_1 - L_2$ 。唯一需要注意的是 50-50 分束器。注意到在惯性参考系下，干涉仪相位可以写为 $\varphi_{\text{sagnac}} = \sqrt{2}2\pi vL/\lambda c$ ，其中 $v = p/m$ 是分束器沿着 45 度（角向）运动的速度。可以证明，当系统的相位 $\varphi_{\text{sagnac}} = (2n + 1)\pi$ 时，由于输入激光都从 b_2^\dagger 端口输出，入射光反射和出射光反射的辐射压力（包括涨落）都基本互相抵消，而透射光是不传递动量的，因此光压不对 $p = mv$ 造成影响。此时 Sagnac 干涉仪相当于对分束器的速度进行“量子无损测量”，在我们分析的这个简单图像下，可以以极大激光功率获得“任意精度”。

更加一般的，如果干涉仪的相位 $\varphi(O)$ 对应的物理量 O 本身是一个量子力学量，那么我们自然希望 O 同时是待测量子系统的守恒量，那么我们就可以设计干涉仪结构及工作点，做到干涉测量对 O 不产生扰动，以对 O 的共轭变量产生大的扰动为代价，对 O 实现高强度，长时间的无损测量。

有趣的是，”量子无损测量“虽然对测量量 O 没有反作用，但是测量结果却可以让本身不确定的 O 局域化。具体来说，极高的测量精度可以将原本分布广泛的 ΔO 压缩到任意小。这儿的初始 ΔO 同时包括我们人类的无知及随机量子涨落（局域波包的动量 p 本身有分布）。

量子无损测量导致的观测量局域化常常特别有用，例如，以相移测量 N 原子布居数 $O = \Sigma_z = \sum_j^N \sigma_z^j$ ，原子能级布居是守恒量，而相移测量本身不改变布居，因此可以长时间测，测得很准。如果初态每个原子都处于 σ_x^j 的本征态，因此有 $\Delta\sigma_z = 1$ 以及 $\Delta\Sigma_z = \sqrt{N}$ 很大呢？随着无损测量的进展， $\Delta\Sigma_z(t)$ 会逐渐变窄，在以 N 个 $1/2$ 自旋连接的广义布洛赫球上在赤道附近形成沿着 z 方向的自旋压缩。

E. 压缩光场的产生和应用

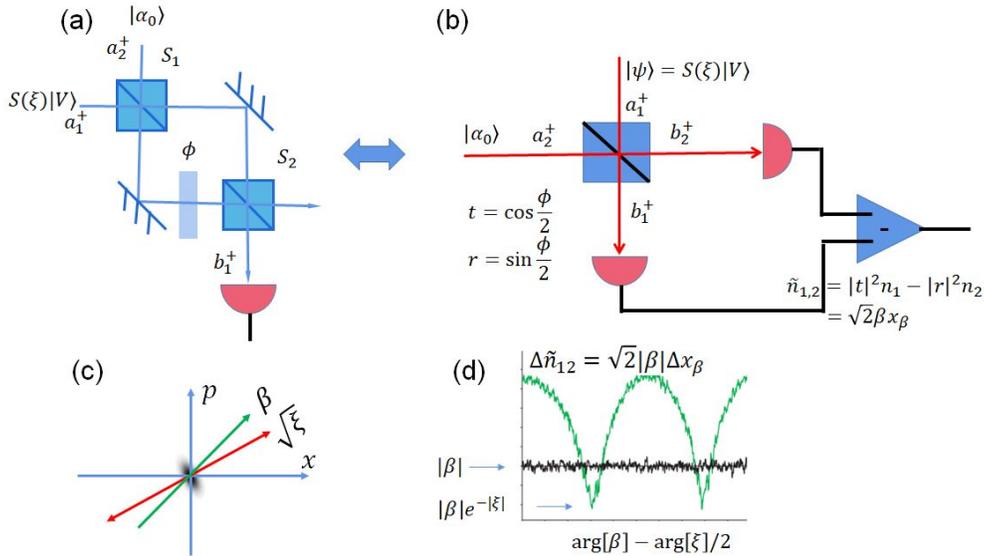


图 19. Squeeze of shot noise with squeezed light

干涉仪即“复合分束器”。从式 (61) 我们知道，在干涉仪中， $\Delta x_\beta = 1/\sqrt{2}$ 对应于输入“暗”端口是真空态。

如果输入“暗”端是真空压缩态:

$$|\xi\rangle = S(\xi)|V\rangle \quad (81)$$

而对于单模光场,

$$S(\xi) = e^{-\left(\frac{\xi}{2}(a^\dagger)^2 - h.c.\right)}$$

是“压缩算符”, $\xi = |\xi|e^{i\phi_\xi}$ 是复数。

将 $S(\xi)$ 对 ξ 做泰勒展开, 很容易发现压缩真空态是偶数光子态的相干叠加, 可以证明, 展开为数态的表达式为:

$$|\xi\rangle = \sqrt{\operatorname{sech}(|\xi|)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!2^n} [e^{i\phi_\xi} \tanh|\xi|]^n |2n\rangle \quad (82)$$

真空压缩态的相空间表示见图 (19)(a-c)。

运用式 (82) 对观测量的期待值做具体计算常常并不方便。另一方面, 对于任何观测量 O 来说, 由于 $\langle \xi|O^m|\xi\rangle = \langle V|(S^\dagger(\xi)OS(\xi))^m|V\rangle$, 因此, 我们只需要考虑 $O(\xi) = S^\dagger(\xi)OS(\xi)$ 的性质。

我们考虑 a, a^\dagger 的变换性质。考察

$$a(\xi) = S^\dagger(\xi)aS(\xi)$$

首先, 我们可以做一个酉变换, $a \rightarrow ae^{-i\phi_\xi/2}$, 这样 $\xi \rightarrow |\xi|$ 就是实数了, 我们对 a 求导并注意到 $S^\dagger a^m S = a^m(\xi)$, 得

$$\frac{da(\xi)}{d\xi} = [((a(\xi)^\dagger)^2 - a(\xi)^2), a(\xi)]/2$$

即

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\xi} &= -a^\dagger, \\ \frac{da^\dagger}{d\xi} &= -a. \end{aligned} \quad (83)$$

我们可以将这个方程相加和相减, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{dx_\xi}{d\xi} &= -x_\xi, \\ \frac{dp_\xi}{d\xi} &= p_\xi. \end{aligned} \quad (84)$$

这儿 x_ξ, p_ξ 的下标代表沿着 a 已经转动到 ξ 的方向, 我们有

$$\begin{aligned} x_\xi(\xi) &= x_\xi e^{-|\xi|}, \\ p_\xi(\xi) &= p_\xi e^{|\xi|} \end{aligned} \quad (85)$$

以及在一般角度 $\arg\beta$ 下的正交分量

$$x_\beta(\xi) = x_\xi e^{-|\xi|} \cos(\phi_{\beta,\xi}) + p_\xi e^{|\xi|} \sin(\phi_{\beta,\xi}) \quad (86)$$

因此显然有, 在任意方向上

$$\begin{aligned} \langle \xi|x_\beta|\xi\rangle &= 0 \\ \langle \xi|p_\beta|\xi\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (87)$$

以及在 $|\xi\rangle$ 态的本征方向上

$$\begin{aligned} \Delta x_\xi &= e^{-|\xi|}/\sqrt{2} \\ \Delta p_\xi &= e^{|\xi|}/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (88)$$

注意到压缩态在“正确的方向”，仍然是满足海森堡不确定关系的最小值：

$$\Delta x_\xi \Delta p_\xi = 1/2$$

最后，我们有

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \cosh(|\xi|)a + \sinh(|\xi|)a^\dagger e^{-i\phi_\xi}, \\ a^\dagger(\xi) &= \cosh(|\xi|)a^\dagger + \sinh(|\xi|)ae^{i\phi_\xi}, \end{aligned} \quad (89)$$

保持 $[a(\xi), a^\dagger(\xi)] = 1$ (并不令人惊讶，因为 $S(\xi)$ 是酉算符)。

式 (89) 允许我们计算真空压缩态下的光子数：

$$\begin{aligned} \langle \xi | a^\dagger a | \xi \rangle &= \langle V | a^\dagger(\xi) a(\xi) | V \rangle \\ &= \sinh^2(|\xi|) \end{aligned} \quad (90)$$

即在大 $|\xi|$ 极限下，压缩真空的光子数 $\bar{n} \approx e^{2|\xi|}/4$ ，这么多光子数的态也叫真空态，合适吗？还是合适的，因为有式 (87)(88)。

F. 压缩相干态

我们当然可以定义一般压缩态：

$$|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|V\rangle \quad (91)$$

一般压缩态存在两个相位： ϕ_α 及 $\phi_\xi/2$ ，如果 $\phi_\alpha = \phi_\xi/2 + N\pi$ ，即相空间移动方向即压缩方向，叫做强度压缩态。反之，如果 $\phi_\alpha = \phi_\xi/2 + N\pi \pm \pi/2$ ，则称为相位压缩态。

显然，相位压缩态有利于相位检测。可以证明，对于相位压缩态 $|\alpha, \xi\rangle$ 态，式 (70) 需要改写为：

$$\Delta\phi_{\alpha, \xi} = \frac{e^{-\xi}}{2|\alpha|} \quad (92)$$

高质量压缩真空的产生的重要方法是简并下转化，而相位压缩态可以将 $|\xi\rangle$ 输入到高透射分束器的透射端，并以侧向相干态注入产生 (式 (54))。

G. 简并下转化

在非线性光学中，简并下转化是二次谐波的逆过程。波长为 $\lambda/2$ 的泵浦光在非线性晶体中和 λ 光场相互作用，哈密顿量可以写为：

$$H = \beta a_p^\dagger a^2 + h.c.$$

考虑泵浦光为相干态 $|\alpha_0\rangle$ ，并作半经典近似：

$$H_{sc} = i\hbar g a^2 + h.c. \quad (93)$$

其中 $g = \beta\alpha_0^*$ ，更加物理的表达见图 (20)。考虑光场经过晶体时间为 τ ，演化算符可以写为 $S = S(\xi)$ ，而 $\xi = 2g\tau$ 。

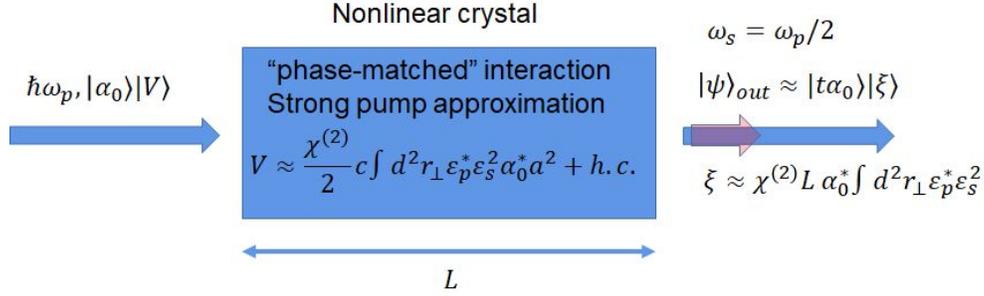


图 20. Phase-matched degenerate down conversion for squeezed vacuum generation, schematic.

H. 压缩过程的经典直觉

注意式 (93) 可以约化为 $H_{sc} = g_r(x^2 - p^2) + g_i(xp + px)$, 可以和自由光场的哈密顿量 $H = \frac{\hbar\omega}{2}(x^2 + p^2)$ 作一个对比。压缩光的产生, 实际上相当于对单模光场“谐振子”的“质量”做了一个瞬态的改变, 从而导致基态波函数的相空间分布发生压缩。

I. 干涉仪真空涨落的相位相关抑制

事实上, 任何光场量子态的制备, 传输, 到探测, 都有可能损耗, 在第 (VIII) 讨论。以下我们姑且假设完美压缩, 完美光传输, 完美检测, 没有损失。

我们考察如图 (19)(a)(b), 对 M-Z 干涉仪的 a_1^\dagger 端口注入压缩真空 $S(\xi)|V\rangle$, 调节相干态 $|\alpha\rangle$ 的相位, 则输出端的光电流差测量 $\tilde{n}_{1,2} = \sqrt{2}\beta x_\beta$ 中的 x_β 可以和 x_ξ 平行, 进而有 $\Delta x_\beta = e^{-|\xi|}/\sqrt{2}$ 的噪声压缩。

相应的, 对干涉仪相位的估计式 (75) 可以改写为:

$$\Delta\phi = \frac{e^{-|\xi|}}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (94)$$

应用到实际测量, 我们可以在降低 \bar{n} 到 $e^{-2|\xi|}$ 倍的情况下获得相同的相位测量精度 (同时保持压缩态本身携带的光子数 $\sinh^2(|\xi|) \ll \bar{n}$)。具体来说, 相干光注入端的功率可以降低 $e^{2|\xi|}$ 倍。运用到引力波探测, 似乎自然有辐射压力涨落的下降, 是否对呢?

J. 干涉仪内部的光强涨落

回到干涉仪的模式变换式 (37), 我们知道:

$$S = S_1^T S_f S_1$$

其中

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$S_f = \begin{bmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{bmatrix} \quad (96)$$

才能有 $t = \sin(\phi/2)$, $r = \cos(\phi/2)$ 的复合变换。在这样的约定下，对于干涉仪输出来说 $\arg\beta = \arg\phi_\xi/2$ 即要求注入光 $\arg\alpha = \arg\phi_\xi/2$ ，才能有 $\Delta x_\beta = e^{-|\xi|}/\sqrt{2}$ 。然而相同的相位要求，对于 S_1 输出来说，却是说 $\arg\beta^{(1)} = \pi/2 + \arg\phi_\xi/2$ 。因此，如果我们考察干涉仪内部的光子数相对涨落，

$$\Delta n_{1,2}^{(1)} = \sqrt{2}|\alpha|\Delta x_{\beta^{(1)}} = |\alpha|e^{|\xi|}$$

实际上是增大了 $e^{|\xi|}$ 倍，刚好和功率 P 降低 $e^{2|\xi|}$ 倍导致的散粒噪声下降互相抵消。因此，SQL 不会有变化！

讨论：

1) 相对相位测量需要相对光子数涨落。 $\Delta\phi > 1/\Delta n$ ，事实上，优化相位精度的方案总是伴随 Δn 的增加。极端案例： $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, n\rangle + |n, 0\rangle)$ (见下节)

2) Δn 自然导致辐射压力涨落，因此，似乎压缩是无法同时降低相位散粒噪声及辐射压力涨落的？

一个巧妙的解决方案是结合激光功率增强技术中的共振腔，运用共振腔的色散，调节辐射压力涨落导致的反射镜运动响应相位。在此不做展开。

VIII. 光学损耗

任何光场量子态的制备，传输，到探测，都有可能损耗。有些损耗是显然的，比如传输过程中的光子散射和吸收 (损耗为 $l = 1 - e^{-OD}$)。另一些则不太显然，比如内差测量 (图 (13)) 中光路没有调节对，待测光路并没有和局域光路完全模式匹配，因此只有匹配的部分 (内积，由 $f \propto |\int \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 d^2\mathbf{r}_\perp c dt|^2$ 决定，损耗为 $l = 1 - f$) 进入了测量。以及探测器本身的量子效率 $Q < 1$ (损耗为 $l = 1 - Q$)。

一个很重要的思考是，所有上述类型的损耗下的量子态，均可以用分束镜下的输入输出关系，结合”部分求迹“(Lecture 1) 来描述。

考察单模光场量子态 $|\psi\rangle = f(a^\dagger)|V\rangle$ 入射透射率为 $|t|^2 = 1 - |r|^2$, $l = |r|^2$ 的理想分束器，分束器的另一个入射端是真空 $|V\rangle$ ，因此分束器输出端的量子态可以表达为：

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = f(tb_1^\dagger - r^*b_2^\dagger)|V\rangle \quad (97)$$

无论何种光损失，由于其造成的后果中我们只关心透射 b_1 模式，我们可以对我们不关心的 b_2 自由度求迹，进而获得 b_1 模式的密度矩阵：

$$\rho = \text{trace}_{b_2}(|\psi\rangle_{\text{out}}\langle\psi|) \quad (98)$$

很显然，从式 (97) 到式 (98)，仅有当 $|\psi\rangle_{\text{out}}$ 是直积态，即可以写为 $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$ 形式的时候，光损失下的光子态 $\rho = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ 才可能是纯态。

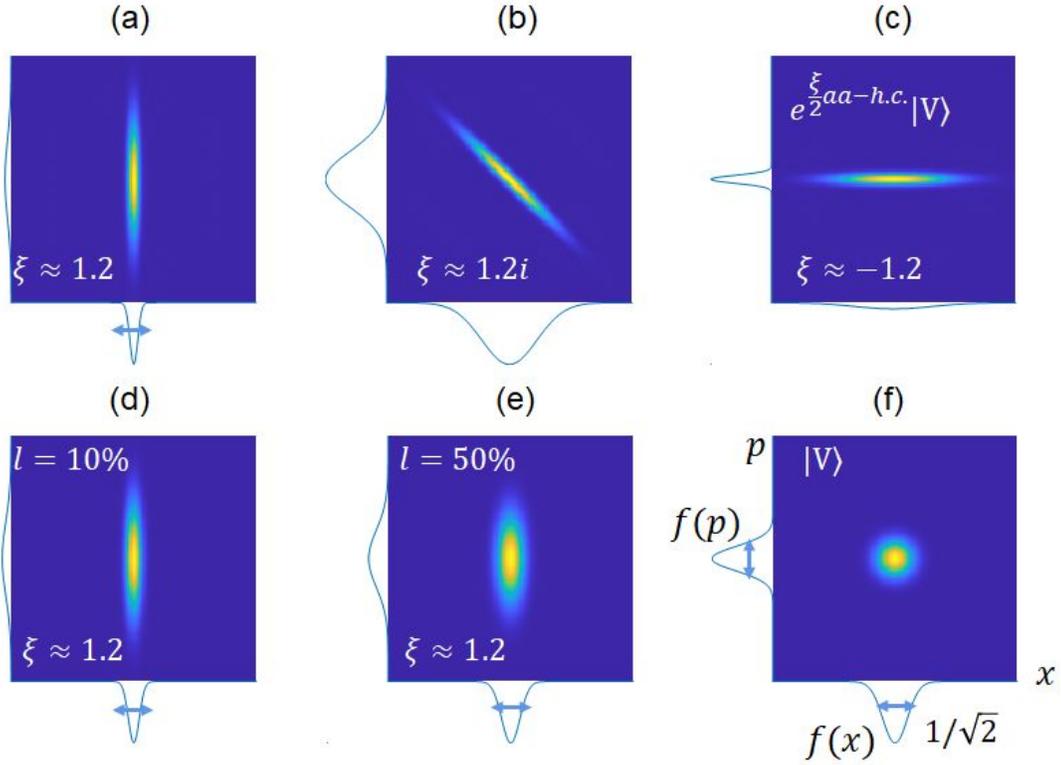


图 21. Wigner distribution of squeezed light (a-c), squeezed light subjected to optical loss (d,e), and vacuum state (f).

什么样的纯态 $|\psi\rangle$ 可以做到这一点？相干态可以：对于输入态 $|\psi\rangle = |\alpha\rangle$ ，那么输出态

$$\rho = |t\alpha\rangle\langle t\alpha| \quad (99)$$

是纯态，只是振幅降低了 $\sqrt{1-l}$ 倍，能量降低了 $1-l$ 倍而已。

损失下纯态变成混合态的例子就很多了。对损失最脆弱的纯态是 Fock 态 $|\psi\rangle = |n\rangle$ ，我们有

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{out}} &= \frac{(tb_1^\dagger - r^*b_2^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |V\rangle \\ &= \sum_m C_n^m \frac{t^m (r^*)^{n-m} (b_1^\dagger)^m (b_2^\dagger)^{n-m}}{\sqrt{n!}} |V\rangle \end{aligned}$$

可知

$$\rho = \sum_m C_n^m (1-l)^m l^{n-m} |m\rangle\langle m| \quad (100)$$

即数态下出射是数态的混合态，其中 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 。Fock 态在 l 损失下的分布概率由二项式分布 $f(n, m) = C_n^m (1-l)^m l^{n-m}$ 决定，非常形象直观。

接下来我们考虑压缩态，如图 (22)，入射 $|\psi\rangle = S(\xi)|V\rangle = e^{\frac{\xi}{2}(tb_1^\dagger - r^*b_2^\dagger)^2 - h.c.}|V\rangle$ 经历了光损失 l ，然后才进入平衡内差测量。因此测量的光子态是 $\rho = \text{trace}_c(|\psi\rangle\langle\psi|)$ 混合态，其压缩属性被“等效分束器”

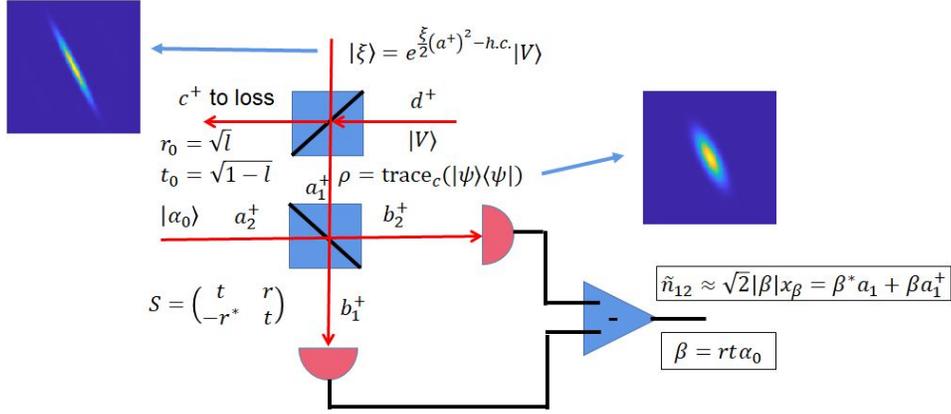


图 22. Homodyne detection of a squeezed state after l -loss. The effective beamsplitter not only induce loss of incident squeezed light, but also introduce vacuum state in the c mode into the output.

的真空输入混合下遭到破坏。可以证明,

$$\Delta x_{\beta}^2 \geq ((1-l)e^{-2|\xi|} + l)/2 \quad (101)$$

因此, 损耗 l 限制了最大压缩程度。

压缩态非常怕损耗, 越是高度压缩的压缩态 $e^{|\xi|} \gg 1$, 越是对损耗 l 敏感。损耗下的压缩态相空间表达见图 (21)(d,e)。

事实上, 越是非经典的量子纯态, 越对损失敏感, 其本质原因, 正是因为“光学损失”是一个两步过程, 其中第一步是相干分束。而分束器的入射暗端口 (图 (22) 的 d 端口), 即使是真空态, 也必然混入透射光场, 破坏量子性。

第三次作业第一部分

1) 请完成式 (41) 的推导, 并将输入态 $|\psi\rangle = (a_1^\dagger)^2(a_2^\dagger)|V\rangle$ 用输出态算符表达。

第三次作业第二部分

1) 请结合上下文及图 (12), 详细完成式 (54) 的推导, 并给出和 r 成正比的一阶修正项的表达式。

2) 请结合上下文, 详细从式 (57) (58) 推导式 (59), 并由式 (60) 计算 $\Delta x_{\beta}, \Delta p_{\beta}$ 。

3) 请考察图 (4d) 的萨尼亚克干涉仪结构及式 (38)(39)。现考虑功率为 P , 波长为 λ 的激光从 a_1^\dagger 端口注入, 通过在 T 时刻内观测 b_1^\dagger 端口的光子计数 $n_1 = b_1^\dagger b_1$ 来推测系统的转动。我们的任务是 $T = 1$ 秒钟测量下的转动分辨率达到或者超过地球转动率,

$$\Delta\Omega \leq \Omega_{\text{earth}}$$

请推导相应激光功率 P , 波长 λ 及干涉仪面积 A 的要求。如果我们只有 $P = 1 \text{ W}$ 的 $\lambda = 1064 \text{ nm}$ 激光, 并且希望整个干涉仪能够放到一个 $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 1\text{cm}$ 的小盒子里面, 是否可以做到?

4) 请结合上下文, 从式 (81) 压缩真空态的定义出发, 详细推导式 (88)。

5) 请结合上下文, 证明式 (100)。