

激光驱动下的二能级原子：量子调控和测量

吴赛骏*

复旦大学物理系，上海 200433, 中国。

本文档随教学进程更新。

I. 光和“原子”相互作用

我们考察自由光场和空间位于 \mathbf{r}_0 的局域电荷体系相互作用，我们称这个局域电荷体系为“原子”，并对相互作用进行多级展开。当体系尺度远小于光场模式波长时，电偶极相互作用是最重要的。

A. 电偶极相互作用

回顾一下自由场和自由原子的哈密顿量：

$$H_0 = \sum_l \hbar\omega_l a_l^\dagger a_l + \sum_n \hbar\omega_n |n\rangle\langle n| \quad (1)$$

电偶极相互作用为

$$\begin{aligned} V &= -\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d}, \\ &= \sum_l (\mathcal{E}_l(\mathbf{r}_0) a_l + h.c.) \cdot \left(\sum_{e>g} \mathbf{d}_{eg} |e\rangle\langle g| + h.c. \right) \end{aligned} \quad (2)$$

我们可以引入么正变换 $S = e^{iH_0 t}$ ，那么在相互作用表象下 $H \rightarrow H_I = SHS^\dagger - H_0 = SVS^\dagger$ ，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_l \mathcal{E}_l e^{-i\omega_l t} a_l + h.c., \\ \mathbf{d}(t) &= \sum_{e>g} \mathbf{d}_{eg} e^{i\omega_{eg} t} |e\rangle\langle g| + h.c. \end{aligned} \quad (3)$$

这些含时算符当然也可以通过解自由场海森堡方程的方法获得。

相互作用绘景下的哈密顿量可以写为

$$\begin{aligned} H &= \sum_l (\mathcal{E}_l a_l e^{-i\omega_l t} + h.c.) \cdot \left(\sum_{e>g} \mathbf{d}_{eg} e^{i\omega_{eg} t} |e\rangle\langle g| + h.c. \right) \\ &= \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{d}^{(-)}(t) + h.c. + \\ &\quad \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{d}^{(+)}(t) + h.c. \end{aligned} \quad (4)$$

其中有我们熟悉的光场及原子电偶极算符的正频分量：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(+)} &= \sum_l \mathcal{E}_l e^{-i\omega_l t} a_l, \\ \mathbf{d}^{(+)} &= \sum_{e>g} \mathbf{d}_{eg} e^{-i\omega_{eg} t} |g\rangle\langle e|. \end{aligned} \quad (5)$$

式 (4) 哈密顿量描述拥有无穷多电磁场模式的量子光场驱动无数多能级跃迁，相应的薛定谔方程是一个无法求解的无穷维线性代数问题。实际计算中，我们常基于系统初态 $|\psi\rangle$ 取值，结合我们关心的描述系统时间尺度，对式 (4) 进行一系列化简。

* saijunwu@fudan.edu.cn

B. 旋转波近似

首先，注意到式 (4) 的第三行，如果我们关心的光场模式 ω_l 和 ω_{eg} 接近， $|\omega_l - \omega_{eg}| \ll \omega_l, \omega_{eg}$ ，我们常常会只关心慢时间尺度上 $\delta t \gg 1/\omega_{eg}, 1/\omega_l$ 的物理规律，从而忽略掉能量不守恒的第三行。

C. 原子能级截断

如果原子的能谱分离且间隔各不相同 (Fig. 1a)，那么存在二能级跃迁和光场共振的可能， $\Delta_{l,eg} = \omega_l - \omega_{eg}$ 在所有跃迁中是最小的。如果同时有光场的耦合较弱，对更长时间尺度上 $\delta t \sim O(1/N\Delta)$ 的描述可以忽略非共振耦合。因此我们可以将电偶极算符等效截断为

$$\mathbf{d}^{(+)} \rightarrow \sum_{e,g \in \{e_c, g_c\}} \mathbf{d}_{eg} e^{-i\omega_{eg}t} |e\rangle\langle g|. \quad (6)$$

当然，这个截断需要兼顾原子初态，光场初态本身取值，例如图 (1a) 这样的 $|g\rangle - |e\rangle$ 二能级近似，常需要原子系统初态已经位于这个子空间（由基态的黑色小球代表），且相应光场 \mathcal{E}_l 的光子布居显著。

讨论：原子能级截断的前提是原子本征态能谱分离且间隔不同。这个要求对基于 $1/r$ 库伦势的原子核-电子体系来说是自然的（如氢原子的 $1/n^2$ 能谱）。另一方面，如果出现图 (1b) 这样的等间距能谱，则原子能级截断无法实现。等间隔能谱常常是谐振子动力学的体现。有没有“谐振子能谱”的原子？有的，举例来说，在微波波段的超导电路。主量子数 n 足够高的氢原子（里德堡原子）也有谐振子的特征。

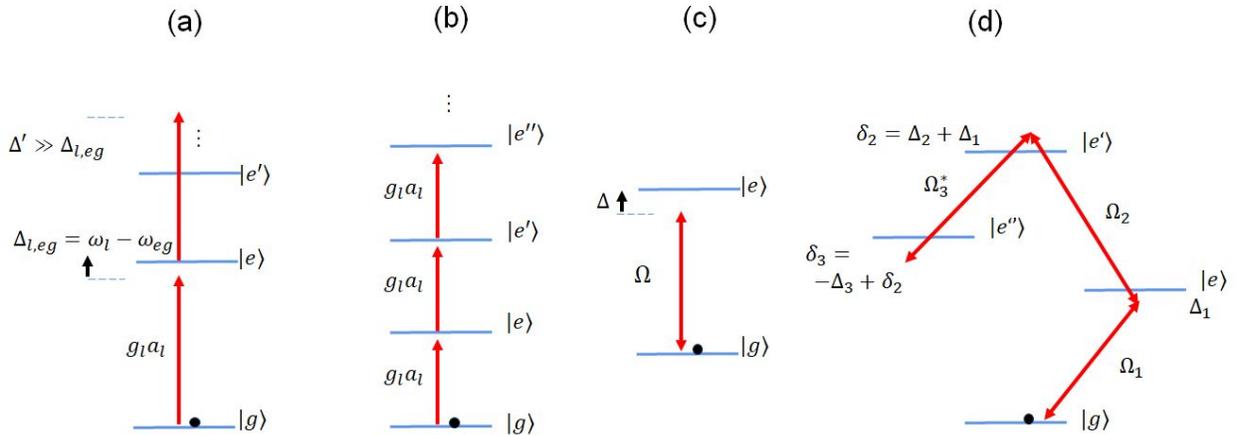


图 1. Level diagrams. (a) Resonant interaction between a quantum field with a 2-level atom defined on $|g\rangle - |e\rangle$ space (other transitions are off-resonant and ignored). (b) Resonant interaction between a quantum field with a quasi-harmonic oscillator. (c) Diagram of 2-level semiclassical light-atom interaction (notice the double-headed Rabi coupling). (d): A typical multi-level, multi-field diagram for semiclassical light-atom interaction.

D. 电磁场模式截断

在对式 (4) 哈密顿量系统进行全量子处理时，我们常常只能考虑有限几个电磁波模式，

$$\mathbf{E}^{(+)} \rightarrow \sum_{l \in \{l_c\}} \boldsymbol{\varepsilon}_l e^{-i\omega_l t} a_l. \quad (7)$$

这些模式 $\{l_c\}$ 包括我们感兴趣的模式：例如这些模式有不可忽略的光子数布居，并且和我们感兴趣的原子具有较强的共振相互作用 (Fig. 1a)。

需要注意的是，即使模式处于真空态，也不见得能被简单扔掉。例如，在腔电动力学中，需要从单光子电场共振耦合强度角度出发，选择重要的予以保留。

E. 几乎都是旋转波近似

上述对式 (4) 中反旋转波项的忽略，以及对电磁模式，原子跃迁的截断，均基于被忽略的相互作用 (形式化的写为 $g_{\text{off}} e^{i\Delta_{\text{off}} t}$) 满足两个条件：

1. 耦合系数 g_{off} 不大。
2. 在相互作用绘景下耦合系数 $g_{\text{off}} e^{i\Delta_{\text{off}} t}$ 高速振荡，难以有效驱动相应的原子跃迁。

为在较慢的时间尺度上简化系统描述，我们将这些微弱及高速振荡耦合在相互作用哈密顿量中去除。然而可以想象的是，即使在慢时间尺度，这些被忽略掉的“能量不守恒”项也存在随耦合强度变大的微小贡献（“虚激发”贡献）。随着计算或者预测精度要求的提高，这些贡献可能变得不可忽略。

不幸的是，如果完全不做此类“旋转波近似”，则不仅薛定谔方程的解析求解会变得复杂，数值计算也会因为“时间步长”太短而无法精确实施。

解决多时间尺度动力学的系统方法是多时间尺度分析。在物理领域，对应的分析方法即是通过高频微扰的细致分析，提取低频等效参数，用于修改（或者说，重新定义）被截断后的等效哈密顿量。

举例来说，式 (4) 的反旋转波项在慢时间尺度上会形成交流 Stark 效应，导致能级移动。因此，我们在慢时间尺度上“扔掉”这些项的同时，可以将相应能级移动量写入第二行 – 这个修正在光场能量较高，耦合较强时尤为重要。

另一个重要的案例，是原子和大量电磁场真空模式的弱耦合。不同于简单的将这些真空模式“扔掉”，在本课程的后半部分这些模式将被处理成和原子系统对应的“环境”自由度，并在 Markovian 近似下形成驱动系统阻尼运动的随机力，和液体中花粉粒子感受到的布朗运动类似。

F. 回顾: Jaynes-Cummings 模型

$$H_{\text{JC}} = -\hbar g e^{-i(\omega - \omega_{eg})t} a \sigma^+ + h.c. \quad (8)$$

其中 $g = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}_{eg} / \hbar$ 为单模光场驱动二能级原子电偶极跃迁的单光子拉比频率。

J-C 模型是光和原子相互作用的最简单“全量子”模型。实验实现上，最大的难点是如何将 g 增大到可以忽略其他模式耦合干扰的程度。这个我们在本课程最后部分会详述。

II. 二能级原子和光相互作用的半经典图像

A. 光和原子相互作用的半经典近似

已经提到，式 (4) 对于量子力学系统的求解困难在于 Hilbert 空间巨大。事实上，相对于自由光场，自由原子来说，该困难的根源在于相互作用算符 $H = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ 将光场自由度和原子自由度”纠缠“起来，使得描述系统的态矢量空间无法写成子系统的直积 (回顾第一讲)。这样的困难，使得即使是如式 (8) 这样的”最简化模型“也难以解析求解。针对这个困难，一个有力的近似是把 $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ 中的光场项经典化：

$$H_{\text{sc}} = -\langle \mathbf{E} \rangle \cdot \mathbf{d}. \quad (9)$$

具体来说，约束电磁场系统到相干态 $|\alpha\rangle = \prod_l |\alpha_l\rangle$ ，获得原子系统的“半经典”哈密顿量：

$$H_{\text{sc}} = \langle \alpha | H | \alpha \rangle$$

从式 (4) 出发，我们有

$$H_{\text{sc}} = \frac{\hbar}{2} \sum_{l,e>g} \Omega_{l,e,g} e^{-i\Delta_{l,e,g}t} |e\rangle \langle g| + h.c. +, \quad (10)$$

$$\Omega_{l,e,g}^* e^{-i(\omega_l + \omega_{eg})t} |g\rangle \langle e| + h.c..$$

其中 $\Omega_{l,e,g} = 2g_{l,e,g}\alpha_l$ 是拉比频率， $\Delta_{l,e,g} = \omega_l - \omega_{eg}$ 是相应光场的失谐量。在拉比频率中引入”2“是因为我们希望和半经典原子物理中的约定对应：对于以 $E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ 振荡的经典电磁波和二能级原子的相互作用，拉比频率定义为 $\Omega = -E_0 e^{-i\varphi} \cdot \mathbf{d}_{eg} / \hbar$ ，而 \cos 函数的指数展开有 $\frac{1}{2}$ 系数。

我们当然可以沿用旋转波近似，并且剔除非共振耦合，获得：

$$H_{\text{sc,rot}} = \frac{\hbar}{2} \sum_{l,e,g \in \{l_c, e_c, g_c\}} \Omega_{l,e,g} e^{-i\Delta_{l,e,g}t} |e\rangle \langle g| + h.c. \quad (11)$$

我们已经知道，光场相干态的物理对应应在光学波段即激光，在微波波段即微波激射。因此，式 (11) 可近似描述原子在激光场中的态演化。

然而约定电磁场永远处于相干态 $|\alpha\rangle$ 合理吗？光场本身会受到原子辐射的反作用，渐渐演化到别的态上。电磁宇宙是开放空间，作为“光学腔”，体积很大，直观上看来原子反作用对其量子态的影响很小，这样的“直觉”可以从数学上被量化，具体步骤见本课程的后半部分关于 Markovian 近似的讨论。另一方面，当 α 非常大的时候， $\Omega = 2\alpha g$ 耦合足够快，短时间内其他 (真空) 微扰可以忽略，因此原子系统看到的光场作用可近似为该经典光的相干作用。

1. 能级图

式 (13) 对应的能级图见图 (1c)，式 (11) 对应的能级图见图 (1d)。

注意：不同于图 (1(a,b))，半经典图像下我们用双向箭头描述拉比耦合 $\Omega|e\rangle \langle g| + \Omega^*|g\rangle \langle e|$ 。

注意：对于多能级耦合来说，本课程后边部分我们会说明，驱动光和原子跃迁的失谐量常常用“多光子失谐量” $\delta_N = \sum \Delta_j$ 更加方便。

2. 另一种半经典近似

$$H'_{sc} = -\mathbf{E} \cdot \langle \mathbf{d} \rangle. \quad (12)$$

这个我们在上节课经典振子驱动相干态光场中已经应用。

3. 简介：偶极子自由度的绝热去除

4. 简介：光场自由度的绝热去除

B. 二能级原子的共振激光驱动

作为式 (11) 的特例，对于式 (8) J-C 模型，我们有旋转波近似下的半经典模型 (省略解释性下标)：

$$H = \hbar \frac{\Omega}{2} e^{-i\Delta t} \sigma^+ + h.c. \quad (13)$$

1. 旋转波变换

已经反复强调，运用么正变换 $S = e^{-i\omega\sigma_z t}$ ，哈密顿量辅对角元 $H_{eg} \rightarrow H_{eg} e^{-i\omega t}$ ，而主对角元会加上 $\hbar\omega\sigma_z$ ，这个旋转波变化也是一种广义的汇景变换。这儿我们以式 (13) 为例，在哈密顿量层次上把这件事再做一遍。重写之：

$$H = \hbar \frac{\Omega}{2} e^{-i\Delta t} |e\rangle\langle g| + h.c. \quad (14)$$

如果我们做代换：

$$|e\rangle \rightarrow e^{-i\Delta t} |e\rangle$$

可以将含时因子 $e^{-i\Delta t}$ “吸收” 到激发态 $|e\rangle$ 的定义里面，同时添加哈密顿量的主对角元项，

$$-\hbar\Delta |e\rangle\langle e|$$

因此有：

$$H = -\hbar\Delta |e\rangle\langle e| + (\hbar \frac{\Omega}{2} |e\rangle\langle g| + h.c.). \quad (15)$$

当然，还可以做这样的变换：

$$|e\rangle \rightarrow e^{-i\Delta t/2} |e\rangle$$

$$|g\rangle \rightarrow e^{i\Delta t/2} |g\rangle$$

同时添加：

$$-\hbar\Delta/2 |e\rangle\langle e|$$

及

$$\hbar\Delta/2 |g\rangle\langle g|$$

从而得到：

$$H = -\hbar \frac{\Delta}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + (\hbar \frac{\Omega}{2} |e\rangle\langle g| + h.c.). \quad (16)$$

C. 拉比矢量和布洛赫球

式 (16) 可以规整为如下形式:

$$H = \frac{\hbar}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma} \quad (17)$$

其中有拉比矢量 $\vec{\Omega} = (\Omega_r, \Omega_i, -\Delta)$, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

式 (17) 让我们想到磁场里面进动的磁 1/2 自旋。事实上, 所谓“旋转波变换”, “旋转波近似”, 都是从核磁共振领域借用过来的术语, 见接下来的进一步讨论。

我们定义原子态的密度矩阵 $\rho(t) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{n}(t) \cdot \vec{\sigma})$, 有:

$$\dot{\mathbf{n}} = \vec{\Omega} \times \mathbf{n} \quad (18)$$

因此, 二能级原子态也可以映射到一个单位球上的矢量 \mathbf{n} 。我们还可以参数化

$$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

那么态矢量本身也可以写为:

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi(t)}{2}}|e\rangle + \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)e^{i\frac{\varphi(t)}{2}}|g\rangle \quad (19)$$

如图 (2b) 所示的球, 称为布洛赫球, 是 Felix Bloch 在研究核磁共振的时候引入的。注意, 在布洛赫球上, 反平行态矢量代表“态正交”, 这是因为:

$$\begin{aligned} |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 &= \text{trace}(\rho_1\rho_2) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2). \end{aligned} \quad (20)$$

D. 广义拉比振荡

我们定义拉比矢量的单位矢

$$\mathbf{n}_{\vec{\Omega}} = \vec{\Omega}/|\vec{\Omega}|$$

其中

$$|\vec{\Omega}| = \sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2}$$

称为广义拉比振荡频率。为啥叫这个名字呢, 我们引入 $|\tilde{g}\rangle$, 使得 $|\tilde{g}\rangle\langle\tilde{g}|$ 对应的布洛赫矢量 $\mathbf{n}_{\tilde{g}} = \mathbf{n}_{\vec{\Omega}}$ 和拉比矢量平行。类似的, 引入 $|\tilde{e}\rangle$, 使得 $|\tilde{e}\rangle\langle\tilde{e}|$ 对应的布洛赫矢量 $\mathbf{n}_{\tilde{e}} = -\mathbf{n}_{\vec{\Omega}}$ 和拉比矢量反平行。我们可以对式 (17) 对角化:

$$\begin{aligned} H|\tilde{g}\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|\vec{\Omega}| |\tilde{g}\rangle \\ H|\tilde{e}\rangle &= \frac{\hbar}{2}|\vec{\Omega}| |\tilde{e}\rangle \end{aligned}$$

因此, 任何一个原子态的演化都可以分解为:

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-i|\vec{\Omega}|t/2} |\tilde{g}\rangle + c_2 e^{i|\vec{\Omega}|t/2} |\tilde{e}\rangle$$

从布洛赫球上来看, n 沿着 $\vec{\Omega}$ 以 θ 为夹角进动。对应 $|\psi(t)\rangle$ 在初态及与初态垂直的态之间振荡, 振幅为 $\sin^2\theta$, 频率为 $|\vec{\Omega}|$ 。

当然, 基于任意方向泡利矩阵 $\sigma^2 = \mathbf{1}$ 的性质, 我们还可以将广义拉比振荡的演化算符写出来

$$\begin{aligned} U_{\vec{\Omega}}(T) &= e^{-i\frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot\vec{\sigma}T}, \\ &= e^{-i\frac{1}{2}|\vec{\Omega}|\sigma_{\vec{\Omega}}}, \\ &= \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)\mathbf{1} - i\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)\sigma_{\vec{\Omega}}. \end{aligned} \quad (21)$$

这里我们定义了沿着拉比矢量方向的泡利算符 $\sigma_{\vec{\Omega}} = \mathbf{n}_{\vec{\Omega}} \cdot \vec{\sigma}$, 以及拉比转动角 $\Theta = |\vec{\Omega}|T$ 。

E. π 脉冲

有了上述式 (18) 到式 (20) 的准备, 接下来我们考察如何用单模经典光场操控一个二能级原子。

我们考察一个最简单的任务, 将原子从初态 $|\psi(0)\rangle = |g\rangle$ 在一定时间 τ 内搬运到 $|\psi(\tau)\rangle = |e\rangle$ 。我们可以设计共振方波脉冲:

$$\Delta(t) = 0$$

$$\Omega(t) = \Omega_0, 0 < t < \tau$$

。其中 $\Omega_0 = \pi/\tau$ 。在布洛赫球上, 态矢量的运动轨迹是如图 (2) 所示的半个大圆。

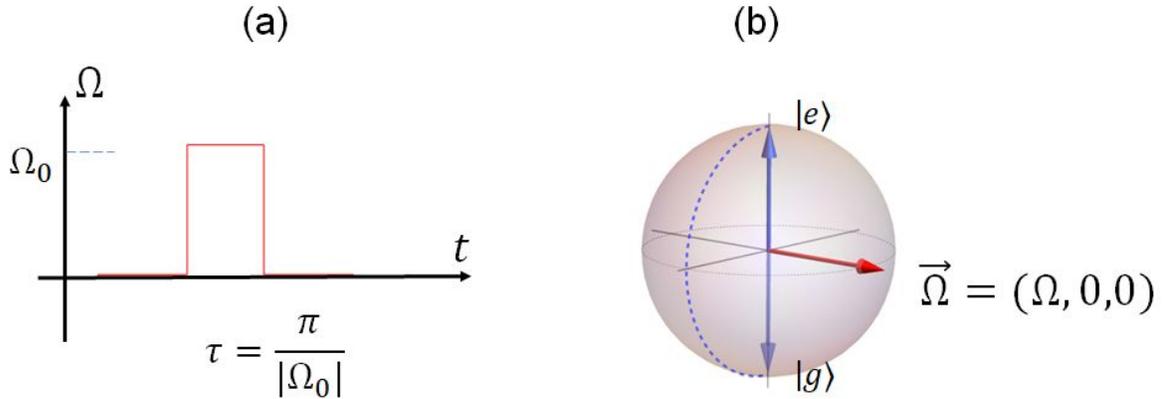


图 2. π -pulse inverse

顾名思义, 这样的反转叫 π -脉冲反转。显然, 在 $\Delta = 0$ 共振情形下, $\Omega(t)$ 的具体形式并不重要, 只需要 $\theta = \int_0^\tau \Omega(t)dt = \pi$ 即可。

F. 几何相位

我们考虑沿着 $\vec{\Omega} = (\Omega_0 \cos\varphi, \Omega_0 \sin\varphi, 0)$ 的 π -反转, 由式 (21) 我们有

$$U_\varphi(\pi) = -i\sigma_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -ie^{-i\varphi} \\ -ie^{i\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

有意思的是，我们发现沿着赤道上 φ_1, φ_2 两个经度方向的两次 π 反转，对应一个相位变化：

$$U_{\varphi_1}(\pi)U_{\varphi_2}(\pi) = - \begin{bmatrix} e^{i\varphi_{1,2}} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_{2,1}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中 $\varphi_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2$. 有意思的是，式 (23) 的相位，和布洛赫球上的态矢量如何被驱动没有关系，只和其路径相关，而 $\varphi_{1,2}$ 只是布洛赫球面上几何相位的体现，该几何相位由态矢量围合的立体角决定。

G. 用复合脉冲实现布居反转

有些时候，我们无法做到 $\Delta = 0$, 这个时候可以运用“组合脉冲”的方法来实现布居反转：

考虑脉冲的失谐量 $\Delta = \Delta_0$ 是一个非零定值，并且 $|\Omega| = O(\Delta_0)$ 的取值大小也被限制，这个时候，我们可以以如下双脉冲的形式反转布居：

时长 $\tau_1 = \pi/\sqrt{2}|\Delta_0|$ 的方波脉冲：

$$\vec{\Omega}_1 = (\Delta_0, 0, \Delta_0)$$

这个脉冲作用下，原子态从基态被搬运到赤道：

相应的 Bloch 球轨迹如图 (3a)。

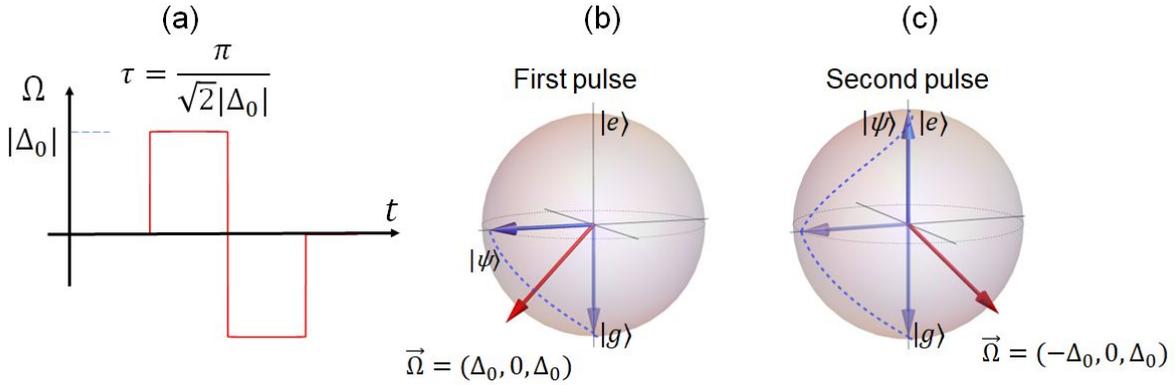


图 3. Double-pulse inversion.

接下来，第二个时长 $\tau_2 = \pi/\sqrt{2}|\Delta_0|$ 的方波脉冲：

$$\vec{\Omega}_2 = (-\Delta_0, 0, \Delta_0)$$

完成反转。相应的 Bloch 球轨迹如图 (3b)。

现实生活中，脉冲 $\vec{\Omega}_{1,2}$ 的实现仅仅需要调节脉冲光场 \mathcal{E} 的相位 φ ，两个脉冲的相位相反即可。

进一步，如果对光场强度的限制更严，例如仅允许 $\Omega_0 \leq \varepsilon|\Delta_0$ ，而 $\varepsilon \ll 1$ ，那么可以设计如图 (4a) 的多脉冲，也可以实现布居反转 (图 (4b))。

再进一步，如果我们的光强调制设备并不允许如图 (4a) 这样的强度调制，仅允许缓变的调制，其实也没关系，只要能在 $\tau = \pi/|\Delta_0|$ 间隔上反转相位，就能实现高效反转 (Fig. 4c)。

上述图 4(a,c) 案例值得应用我们的三维直觉思考一下。此外，如图 4(a,c) 的 $\Omega(t)$ 波形，如果我们对之做傅里叶变换，那么一定会出现 $\pm\Delta_0$ 分量，其中 $-\Delta_0$ 分量会抵消原激光“载波”的失谐，形成

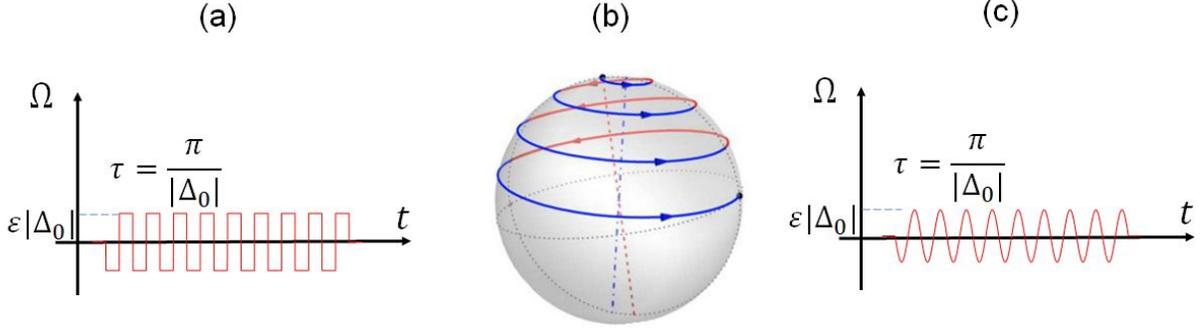


图 4. N-pulse inversion and sine-modulated inversion.

共振驱动。然而值得注意的是，这样的“数学直觉”不容易预言此类组合脉冲的“完美反转”能力。而结合布洛赫球，这些方案比较容易由我们的“立体几何直觉”理解。

H. 含时微扰

一般情况下，因为式 (17) 哈密顿量中的拉比矢量 $\vec{\Omega}(t)$ 可以含时，半经典光场驱动的二能级原子动力学可以很复杂，而态矢量的动力学不见得存在解析解。这个时候，如果光场耦合强度不大，作用时间不长，则在初态附近的微扰解常常变得很方便。为方便表达含时微扰，我们将哈密顿量变回到只有非对角元的式 (14) 形式，考察原子态为 $|\psi(t=0)\rangle = |g\rangle$ 下在 $t=T$ 时刻的激发。设 $|\psi(t)\rangle = c_g(t)|g\rangle + c_e(t)|e\rangle$ 并考虑

$$c_g(t) = c_g^{(0)}(t) + c_g^{(1)}(t) + \dots$$

$$c_e(t) = c_e^{(0)}(t) + c_e^{(1)}(t) + \dots$$

以 ΩT 为小量展开。我们有电场 $c_g^{(0)} = 1, c_e^{(0)} = 0$ ，及

$$i\dot{c}_e^{(n)} = \frac{1}{2}\Omega e^{-i\Delta t} c_g^{(n-1)}$$

$$i\dot{c}_g^{(n)} = \frac{1}{2}\Omega^* e^{i\Delta t} c_e^{(n-1)}$$

一阶微扰近似下，我们有：

$$c_e(T) = -\frac{i}{2} \int_0^T \Omega(t) e^{-i\Delta(t)t} dt \quad (24)$$

显然，式 (24) 成立的条件是 $|c_e|^2 \ll 1$ 。注意，如果 $\Delta(t)$ 是一个常数，则式 (24) 的意思就是说，原子激发概率 $\rho_{ee}(\omega)$ 正比于脉冲 $(\Omega(t), 0 < t < T)$ 的频谱变换的功率密度 $|\Omega(\Delta)|^2$ 。

I. Rabi 方法和 Ramsey 方法

有了式 (24) 的准备，接下来我们介绍两个极端重要的原子光谱技术。这两个技术推动了当代物理大厦的建成，且正在用于定义国际单位制的时间。

和宏观物质相比，自由原子最重要的特点包括“全同性”和“可计算性”。先说可计算性。以氢原子为例，从波尔，薛定谔，到狄拉克，贝特，费曼... 氢原子光谱计算精度被不断地提升。因此，实验室对氢原子光谱的测量可以被用于和精确理论进行比对，用来验证理论（多体量子理论，原子核理论，高能物理等）的正确性，以及参数（如电子电荷，质子质量，磁矩...）的精确性，等。当前人类对原子光谱的第一原理计算已经可以到达 3 电子的锂原子，所以，氢，氦，锂这三种原子的实验光谱测量及理论比对，对基础物理的推动是很厉害的。本小节以兰姆测量氢原子的 $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ 兰姆移动为例，介绍光谱学的拉比方法。

另一方面，中国的氢原子和美国的氢原子全同，一亿年前的氢原子和一亿年后的氢原子（应该也）全同。因此，原子的本征跃迁频率 ω_{eg} 可以用来和激光器，微波发出的电磁波频率比对，进行光学波段的“钟表对时”。此类比对一方面可以用来推测不同地方原子的局部“引力红移”，在天文光测中以多普勒频移推测类地行星的存在，甚至以不同谱线特征推测物理常数随时间的可能漂移（精细结构常数测量计划“ α ”）。另一方面，可以用来计时，形成最准确的时间标准并用于从激光定位，卫星导航，到股市高频交易等诸多领域。当然，“光钟”技术有各种复杂的技术困难，此前仅被运用于离子的光学跃迁（美国科罗拉多大学的 David Wineland）。对于中性原子来说，各类技术困难直到十多年前，才被美国科罗拉多大学的叶军，日本东京大学的香取秀俊等逐步解决。在实际应用方面，目前最广泛用于计时的原子钟仍然是基于碱金属基态的超精细结构，包括目前国际单位秒定义的铯 133 超精细结构基态的磁偶极跃迁。本小节以铯原子钟为例，介绍光谱学的拉姆齐方法。

首先说 Rabi 方法，具体案例标记氢原子的 $2S_{1/2}$ 态为 $|g\rangle$ ， $2P_{1/2}$ 态为 $|e\rangle$ ，狄拉克方程的预测，是这两个态是简并的， $\omega_{eg} = 0$ 。在 1947 年，奥本海默的学生兰姆运用微波对这个跃迁频率进行了测量。他首先将氢原子用高压放电的方法制备到 $2S_{1/2}$ 亚稳态，然后让亚稳态原子束经过一个微波共振腔，调节微波频率 ω ，并观测 $2P_{1/2}$ 态自发辐射的 $\lambda = 121.6 \text{ nm}$ 深紫外荧光（图 5）。

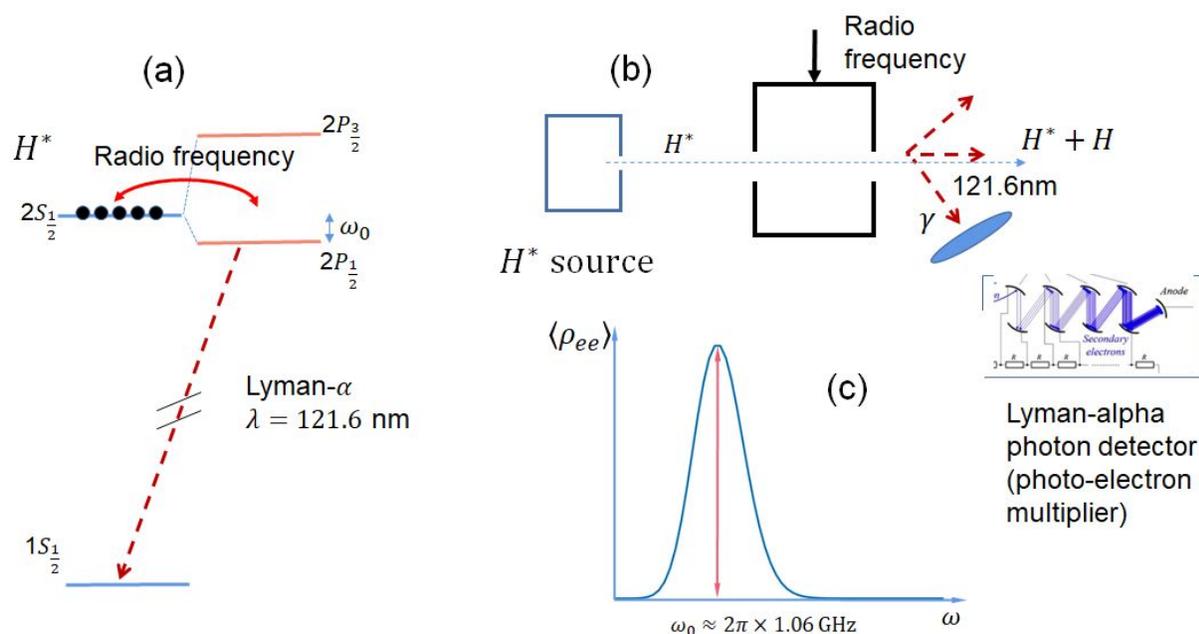


图 5. Lamb shift measurement.

这儿有一些原子物理： $2S_{1/2}$ 是亚稳态，有 100 多毫秒的超长寿命，而 $2P_{1/2}$ 的辐射寿命仅 $\tau_r = 1.6 \text{ ns}$ ，为何如此？我们在课程中期会运用 Wigner-Weisskopf 理论详细讨论。这儿我们仅仅认为由 $|g\rangle -$

$-|e\rangle$ 构成的二能级原子被以 ω 为频率的微波场 Ω 驱动。设原子束速度为 v ，微波腔长为 L ，那么我们可以近似 $\Omega(t) = \Omega_0, 0 < t < T$ 为方波， $T = L/v$ 。如果微波强度足够弱，那么我们可以运用式 (24) 计算穿过微波腔后的 $2P_{1/2}$ 态原子数布居，

$$\rho_{ee}(\omega) \propto |\Omega(\omega - \omega_{eg})|^2 \quad (25)$$

Lamb 发现，荧光产额在 $\omega \approx 2\pi \times 1.09$ GHz 的时候出现峰值，而不是在零频附近，即 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 有 1.09GHz 的劈裂 (兰姆移动，见图 (5c) 示意)。这个发现在当时的物理学界触发了地震，直接推动了量子场论的发展。

注意到，由图，拉比方法的频谱分辨率 $\delta\omega \sim 1/T$ ，因此，对于测量线宽更加窄的跃迁 (如分子转动，振动，或者接下来要说的超精细跃迁)，如果我们希望提高频率分辨率，一个很不错的方法是增加探测相互作用时间 T 。这个比较麻烦：对于高速运动 (近 1000 米/秒) 的原子束来说，1 毫秒探测时间需要 1 米长的微波腔，已经非常不方便。这儿我们就介绍 Rabi 的学生，拉姆齐发明的分离振荡场方法。

考察“载波频率”为 ω 的双脉冲波形 (图 (6a)):

$$\Omega(t) = \Omega_0, 0 < t < \tau, T < t < T + \tau$$

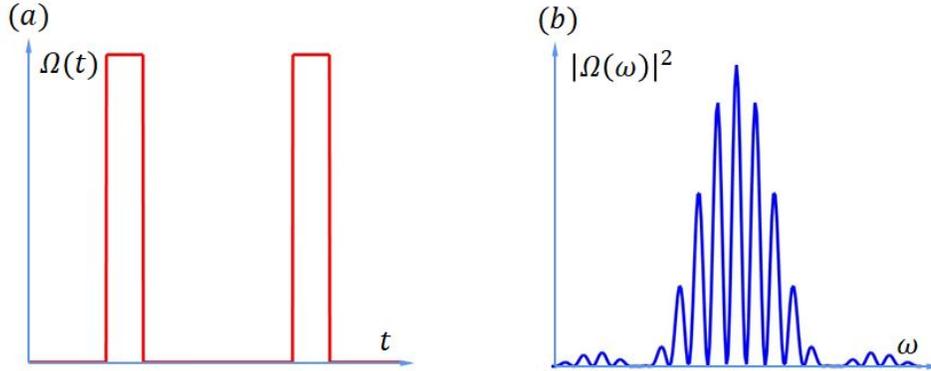


图 6. Ramsey interferometer in time (a) and frequency (b) domain

对应到原子束实现，即是吧兰姆的长微波腔分成两个，但是用同一个微波场驱动。按照式 (24)，我们同样有 (图 (6b))

$$\rho_{ee}(\omega) \propto |\Omega(\omega - \omega_{eg})|^2$$

此时， $\rho_{ee}(\omega)$ 的包络面是 $1/\tau$ 宽度，中心条纹宽带为 $1/T$ 。实验上来说，两个分离的谐振腔比一个长腔方便得太多。运用该技术，拉姆齐在哈佛大学制作了数米长的分子束光谱测量装置 (图 (7))，对分子光谱实现了 Hz 级高精度测量。

当然，相互作用时间 T 的进一步提高需要对原子进行减速，当前的铯原子钟是运用激光冷却技术实现的原子喷泉：将速度降至毫米/秒的超冷铯原子用光力加速上抛，在上升和下降期间两次穿越频率

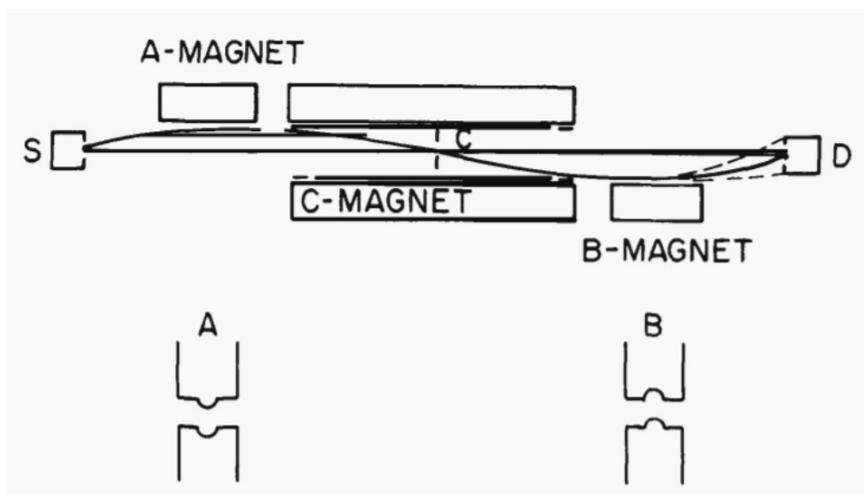


图 7. The actual Ramsey interferometer for spectroscopy with molecular beams, from Ramsey Nobel lecture Notes

为 $\omega = 2\pi \times (9192631770 + \delta f)$ Hz 的微波腔，相隔时长 $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ 可高达数百毫秒，并收集原子干涉信号 $\rho_{ee}(\omega)$ ，以铯原子频率定时校正 δf 。

在原子钟方面，原子钟相干时间记录，实际上是由我国保持的。在 2016 年发射的天宫二号微重力环境中，对极低温铷 87 原子在失重环境下实现的拉姆齐光谱，相干时间达到了数秒。接下来我们期待空间站进展。

J. 回顾：核磁共振、旋转波变换、旋转波近似

回到第一讲，在沿着旋转磁场 $\mathbf{B} = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0)$ 转动的坐标系下，质子的进动方程

$$\dot{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \Omega \cos(\omega t) \\ \Omega \sin(\omega t) \\ \omega_0 \end{bmatrix} \times \mathbf{n} \quad (26)$$

变换为

$$\dot{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \\ \omega_0 - \omega \end{bmatrix} \times \mathbf{n} \quad (27)$$

而旋转波近似，是指 $(B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0)$ 旋转磁场可由用线性振荡磁场 $(2B_1 \cos \omega t, 0, B_0)$ 代替 (Fig. 8c)，并“在一定条件下”达到相同的共振效果。

K. 量子投影噪声的经典极限

顺便说以下这个重要话题。

以上分子光谱，原子钟等技术，最后都需要对原子态布居进行测量：

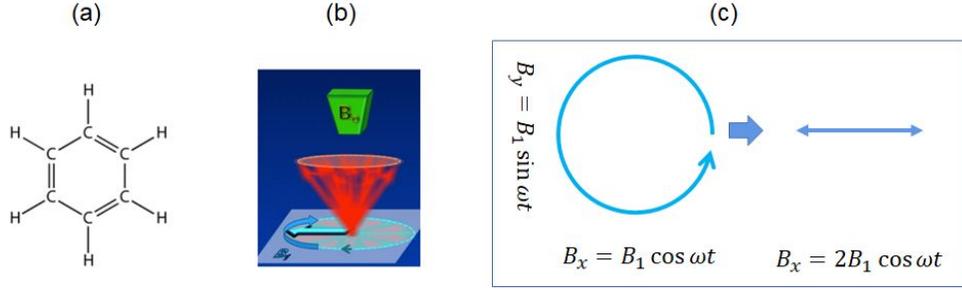


图 8. (a): NMR can resolve the "chemical shift" to the local magnetic field experienced by proton in hydrogen. (b): In NMR, a weak, rotating magnetic field in the $x - y$ plane can flip the magnetic spin, if $\omega = \omega_0$. (c): Rotating wave approximatin means driving the spin-flip with a linearly oscillating field, instead of a rotating field.

$$\rho_{ee} = \frac{1}{2}(1 + \langle \sigma_z \rangle)$$

和角动量代数相联系，我们考察观测量 σ_z 在如式 (19) 的原子末态下观测，我们有

$$\langle \sigma_z \rangle = \cos\theta$$

我们还知道，

$$\langle \sigma_z^2 \rangle = 1$$

因此，有涨落标准差

$$\Delta\sigma_z = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = |\sin\theta|$$

要想抑制这个涨落，可以做多次测量。记发生了 $j = 1, \dots, N$ 次测量，总自旋 z 分量是 $\Sigma_z = \sum_j^N \sigma_z^{(j)}$ ，联合量子态为直积态：

$$|\Psi\rangle = \prod_j |\psi\rangle_j$$

我们有，

$$\langle \Sigma_z \rangle = N\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_z^2 \rangle &= \sum_j \langle (\sigma_z^j)^2 \rangle + \sum_{j \neq k} \langle \sigma_z^j \sigma_z^k \rangle \\ &= N + N(N-1)\cos^2\theta \end{aligned} \quad (28)$$

注意，最后一步我们运用了直积态下 $\langle \sigma_z^j \sigma_z^k \rangle = \langle \sigma_z^j \rangle \langle \sigma_z^k \rangle$ 这个性质。

因此有

$$\Delta\Sigma_z = \sqrt{N}|\sin\theta| \quad (29)$$

似乎涨落反而大了？是的，但是平均值 $\langle \Sigma_z \rangle \propto N$ 增大得更快。我们考察运用式 (25)，结合实验数据，来推测电磁场频率 ω 。运用误差分析的锁链法则，我们有：

$$\begin{aligned}
\delta\omega &= \frac{\Delta\rho_{ee}}{|\partial_\omega\rho_{ee}|} \\
&= \frac{\Delta\Sigma_z}{|\partial_\omega\langle\Sigma_z\rangle|} \\
&= \frac{\Delta\Sigma_z}{|\partial_\theta\langle\Sigma_z\rangle\partial_\omega\theta|} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{NT}}
\end{aligned} \tag{30}$$

其中最后一步运用到上述遵循式 (17) 的量子态演化来决定最后原子态角度 $\theta = \theta(\omega T)$ 。

如第一节课所述, 这样的基于标准差的预测适用于一大类随机分布函数 $f(\Sigma)$ 。这儿 $f(\Sigma)$ 是二项式分布。记测量得到 $|g\rangle$ 态的次数为 N_g , 激发态为 N_e , 那么 $N_g + N_e = N$, $N_e - N_g = \Sigma$, 对于 $\langle\sigma_z\rangle = \cos\theta$ 的态来说,

$$f(\Sigma) = C_N^{N_e} \cos^{2N_g} \left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^{2N_e} \left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{31}$$

和扔钢镚的分布是一样的, 在大 N 情况下接近 (粗粒化的) 高斯分布。然而需要注意的是, 这儿我们假设了直积态, 因此每个原子的量子态是不关联的。如果有量子关联, 则上述分析并不正确。

III. 第二次作业的第一部分

1) 在讨论原子态截断时, 我们指出如图 (1b) 的能级结构和周期性光场相互作用时, 是无法做原子态少能级截断的。现考虑该原子是一个谐振子, 因此能级是严格等间距的。考察单模量子光场, $\mathbf{E} = \mathcal{E}a + h.c.$, 和这样的原子相互作用。请通过引入适当算符, 写出类似于式 (8) 的, 形式简洁的哈密顿量。

2) 请结合上下文, 按照你的理解补充讲义思路空白, 详细推导式 (14)-式 (16)。

3) 请结合上下文, 详细推导式 (21)。

4) 请详细解释为何图 (4a) 波形可以实现原子态的完美 $|g\rangle - |e\rangle$ 翻转? 在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限下, 需要多少个相位翻转的脉冲可实现完美翻转?

5) 请结合上下文, 给出图 (6)b Ramsey 干涉谱的数学表达式。