

相干态和激光

吴赛骏*

复旦大学物理系, 上海 200433, 中国。

本文档随教学进程跟新。

I. 回顾: 自由光场的二次量子化

我们通过寻找自由电磁场的正则坐标和正则动量, 完成了光场的量子化, 这儿有几个点再回顾一下:

A. 电磁模式函数归一化, 单光子波函数

我们电场算符可以由自由空间光场模式函数 \mathcal{E}_l 展开, 表达为

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_l \mathcal{E}_l a_l e^{-i\omega_l t} + h.c. \quad (1)$$

我们可以计算一下自由电磁场能量 $H_l = \varepsilon_0 \int d^3 |E(\mathbf{r})|^2$ 在单光子态 $|1_l\rangle = a_l^\dagger |V\rangle$ 态下的期待值,

$$\langle 1_l | H_l | 1_l \rangle = 3\varepsilon_0 \int d^3 |\mathcal{E}_l(\mathbf{r})|^2 = \frac{3}{2} \hbar \omega_l,$$

因此电磁模式函数的归一化条件:

$$\varepsilon_0 \int d^3 |\mathcal{E}_l(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2} \hbar \omega_l. \quad (2)$$

例如, 对于周期性边条件下量子化体积 V 内的平面波模式来说, $\mathcal{E}_{\mathbf{k},s} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_s e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, 且满足横波条件 $\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{k} = 0$. 满足这样归一化条件的电磁模式函数 \mathcal{E}_l 又被称为单光子波函数, 在下一讲中会进一步论述。

B. 从行波模式到高斯模式

我们知道光场模式变换

$$\tilde{\mathcal{E}}_l = \sum_k S_{lk} \mathcal{E}_k$$

对应光子产生算符变换

$$b_l^\dagger = \sum_k S_{lk} a_k$$

其中 S 是模式函数空间的么正算符,

$$\sum S_{l'k}^* S_{lk} = \delta_{l'l}$$

如下, 我们忽略偏振指标 s , 考虑行波模式 $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ 和某个特定高斯光场 \mathcal{E}_G 之间的变换。定义变换矩阵

$$S_{G,\mathbf{k}\perp} = w_0 \sqrt{\frac{2\pi}{A}} e^{-\frac{1}{4} \mathbf{k}_\perp^2 w_0^2}. \quad (3)$$

其中下标 G 代表我们希望变换出来的高斯光模式。这个模式沿着 z 方向传播, 真空波长为 λ , 束腰的位置在 $z = 0$, 腰宽为 w_0 。在上式中我们考虑将量子化体积刻画为 $V = A \times L$, 其中长度 L 沿着 z 方向, 而 A 是 $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ 方向上的量子化面积。

* saijunwu@fudan.edu.cn

我们定义波数 $k = 2\pi/\lambda$, 那么有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_G(\mathbf{r}_\perp, z) &= \sum_{\mathbf{k}_\perp} w_0 \sqrt{\frac{2\pi}{A}} e^{-\frac{1}{4}\mathbf{k}_\perp^2 w_0^2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &\approx \sum_{\mathbf{k}_\perp} w_0 \sqrt{\frac{2\pi}{A}} e^{-\frac{1}{4}\mathbf{k}_\perp^2 w_0^2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} e^{i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp - i\frac{k_\perp^2}{2k}z + ikz} \\ &\rightarrow \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k}_\perp w_0 \sqrt{\frac{2\pi}{A}} e^{-\frac{1}{4}\mathbf{k}_\perp^2 w_0^2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} e^{i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp - i\frac{k_\perp^2}{2k}z + ikz}.\end{aligned}\quad (4)$$

注意, 上式从第一行到第二行我们运用了泰勒展开, $\sqrt{k^2 - k_\perp^2} \approx k - \frac{k_\perp^2}{2k}$, 并忽略高阶项。注意到这个二阶近似的准确性可以由高斯积分 $e^{-\frac{1}{4}\mathbf{k}_\perp^2 w_0^2}$ 保证: $kw_0 \gg 1$ 即光束拥有好的准直性, 即可。这个近似和上一讲中行波包络面的“慢变化振幅近似”, 或者“旁轴近似”, 一脉相承。

通过上式第三行的二维积分 (对高斯型的傅里叶变换), 可以得到:

$$\mathcal{E}_G(\mathbf{r}; P) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{\varepsilon_0 \pi L}} \frac{1}{w(z)} e^{-\frac{r_\perp^2}{w^2(z)} - ik\frac{r_\perp^2}{2R(z)} + i\varphi_G} e^{ikz}.\quad (5)$$

其中 P 代表高斯光的参数集合, 包括束腰位置 $\mathbf{r}_0 = 0$, 波矢 $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$, 高斯腰宽 w_0 。这些参数决定了如下沿着传播方向变化的参量: 腰宽 $w(z)$, 波前曲率半径 $R(z)$, Gouy 相位 $\varphi_G(z)$,

$$\begin{aligned}w(z) &= w_0 \sqrt{1 + z^2/z_R^2}, \\ R(z) &= z + z_R^2/z, \\ \varphi_G(z) &= \arctan(z/z_R), \\ z_R &= \pi w_0^2/\lambda.\end{aligned}\quad (6)$$

其中 z_R 称为瑞丽长度。

有了式 (6) 的 \mathcal{E}_G , 我们可以通过正交化的方法产生 $\{\tilde{\mathcal{E}}_l\}$ 并令 $\tilde{\mathcal{E}}_0 = E_G$, 进而完成 $(a_k^\dagger, \mathcal{E}_k) \leftrightarrow (b_l^\dagger, \tilde{\mathcal{E}}_l)$ 模式变换。

C. 局域光场模式

上述式 (5) 的单光子波函数 \mathcal{E}_G 强度峰值为 $\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{\varepsilon_0 \pi L}} \frac{1}{w_0}$, 可远大于行波模式的 $\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{\varepsilon_0 V}}$, 但如果取宏观量子化体积, 那么 $L \rightarrow \infty$ 仍然意味着该模式的单光子电场强度趋于零。有没有更强的单光子电场呢?

回顾第二讲电磁场量子化, 形式上来说, 我们可以考虑“反射镜“闭合下有限体积的光场量子化。例如, 考虑沿着 z 方向摆放, 曲率为 $R(z)$, $z = -d/2, d/2$ 的球面反射镜对, 可支持沿着 $\pm z$ 传播的高斯模式驻波场 $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{E}_G(\mathbf{r}_\perp, z, k) + \mathcal{E}_G(\mathbf{r}_\perp, z, -k)$, 模式体积减小为 $w_0^2 d$, 因此单光子电磁强度的峰值变为有限数。

进一步, 如果我们不考虑光学材料的折射率极限或者损耗, 那么, 可以想象构造一个 $r = \lambda/2$ 级别的理想微腔 (硬墙边条件)。这样的微腔体积 $V\lambda^3$ 是频率为 $\omega = 2\pi c/\lambda$ 的自由空间电磁模式体积最小值为。因此单光子电场峰值的上限是:

$$|\mathcal{E}|_{\max} \sim \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 \lambda^3}}.\quad (7)$$

现实生活中, 制造这样微腔的一个比较基本的限制是透明物质的折射率不很高 ($n = 2$ 就算高折射率了), 因此, 做出来的反射镜, 其反射界面必然伴随光波的“隧穿”, 事实上增大了模式体积。此外, 波长级别的“反射内腔”是非常难加工的, 目前最接近的工艺技术上是对光子晶体引入点缺陷形成。

D. 含时脉冲模式

不引入光学腔，在自由空间也可以在式 (5) 基础上通过得加不同波长单色光模式，形成脉冲光模式，进而增大瞬态单光子场强。和式 (5) 的旁轴近似对应，在第二讲最后我们介绍了脉冲光的波动方程，显而易见的是，如果我们对式 (5) 做变量代换：

$$z \rightarrow \tilde{z} = z - ct$$

可有有脉冲光模式，

$$\mathcal{E}_G(\mathbf{r}, t; P) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{\varepsilon_0\pi c\tau}} \frac{1}{w(\tilde{z})} e^{-\frac{r^2}{w^2(\tilde{z})} - ik\frac{r^2}{2R(\tilde{z})} + i\varphi_G} e^{ik\tilde{z}} f(\tilde{z}). \quad (8)$$

其中脉冲函数 $f(z)$ 满足

$$\int dz |f(z)|^2 = c\tau \quad (9)$$

式 (8) 值得再讨论一下：

1. 加入含时因子 $f(z - ct)$ 的式 (8) 仍然满足自由场 Maxwell 方程的前提是慢变化振幅近似，即 $|c\partial_z f| \ll |\omega f|$ 。与此相应，式 (2) 中的 ω 成为平均频率。
2. 现实生活中，对于光学波段的模式函数来说， $\omega \sim 2\pi \times 10^{14}\text{Hz}$ ，或者说百 THz 级别，因此，即时脉冲时长短到 $\tau = 1 \times 10^{-12}\text{sec}$ ，或者说 1 皮秒级别，式 (8) 近似也是很不错的。
3. 随着腰宽 w_0 及脉冲长度 τ 的压缩， $E_G(\mathbf{r}, t; P)$ 光束束腰及脉冲中心的峰值单光子强度可以相当可观。然而需要注意的是，对于静止物体来说，这样的脉冲相互作用时间也仅仅是 τ 。对于我们接下来要说的电偶极跃迁 $E \cdot d$ ，单光子相互作用积累相位 $\delta\varphi \sim \mathcal{E}\tau \propto \sqrt{\tau}$ ，事实上随着脉冲长度 τ 的减少而下降。因此，通过压缩脉冲光模式的时长 τ 来提高单光子电场强度的用处有限。

E. 电场正交分量

我们回到式 (1)。

已经提到，电场算符还可以分解为正频分量 $\mathbf{E}^{(+)}$ 及负频分量 $\mathbf{E}^{(-)}$ ，写为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)}$$

其中 $\mathbf{E}^{(+)}$ 只含光子湮灭算符 a_l ，且在海森堡表象下的含时相位因子为 $e^{-i\omega_l t}$ ，是为“正频”！

我们将光场升降算符重写为正交分量

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_l + i\hat{p}_l), \\ a_l^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_l - i\hat{p}_l) \end{aligned} \quad (10)$$

带入到式 (1)，有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) &= \sum_l \sqrt{2}\text{Re}[\mathcal{E}_l(\mathbf{r})e^{-i\omega_l t}]\hat{x}_l, \\ \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) &= \sum_l \sqrt{2}\text{Im}[\mathcal{E}_l(\mathbf{r})e^{-i\omega_l t}]\hat{p}_l. \end{aligned} \quad (11)$$

式 (11) 是电场算符的“正交分量”分解。对于其中的每一个模式 l , 其中 $\mathbf{E}_{x,l}(\mathbf{r}, t)$ 常常称为“同相分量”, $\mathbf{E}_{p,l}(\mathbf{r}, t)$ 常常称为“正交分量”, 是沿用微波通讯领域的术语。显然的是, 由于 \hat{x}_l, \hat{p}_l 不互易, $\mathbf{E}_{x,l}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_{p,l}(\mathbf{r}, t)$ 无法同时精确测量。

F. 电场算符的期待值决定于相邻 Fock 态的相干性

我们考虑单模 \mathcal{E} 激发态

$$|\psi\rangle = f(a^\dagger)|V\rangle$$

电场算符的期待值为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle V|f(a)E^{(+)}f(a^\dagger)|V\rangle + c.c., \\ &= \sum_n (n+1)! f_n f_{n+1} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + c.c.. \end{aligned} \quad (12)$$

因此, 电场算符的期待值不为零的必要条件, 是相邻光子数态 $n, n+1$ 具有相干性。

注意, 这儿我们运用到

$$[a, f(a^\dagger)] = \partial_{a^\dagger} f(a^\dagger) \quad (13)$$

II. 相干态

A. 相干态的完备性和正交性

相干态有很多有趣的性质, 这儿我们再补充两个重要的性质:

正交性 (不正交)

$$|\langle \beta|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \quad (14)$$

即在复平面上, 只有当 $|\alpha-\beta| \gg 1$ 时, $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 才是正交的。这是因为:

$$\begin{aligned} \langle \beta|\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \langle \beta|e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2+\alpha\beta^*} \langle \beta|0\rangle \\ &= e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2+\beta^*\alpha} \end{aligned} \quad (15)$$

完备性:

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 \quad (16)$$

这是因为, 对任意 Fock 态 $|n\rangle$, 我们有:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \sum_m \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} |m\rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i(m-n)\varphi} \int_0^\infty d|\alpha|^2 e^{-|\alpha|^2} \sum_m \frac{|\alpha|^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} |m\rangle = |n\rangle \end{aligned} \quad (17)$$

由式 (14) 及式 (16), 相干态 $\{|\alpha\rangle\}$ 构成的基矢是“超完备”的。事实上, 和量子态 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, 观测量 $O = \sum_{m,n} O_{m,n} |m\rangle\langle n|$ 的正交完备基矢展开不同, 相干态的相关展开由无穷多种方式, 我们选择方便的方式。

最简单的方式是对式 (16) 的直接应用:

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} c_\alpha |\alpha\rangle$$

其中 $c_\alpha = \langle\alpha|\psi\rangle$.

$$O = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} A_O(\alpha, \beta) |\alpha\rangle\langle\beta|$$

其中 $A_O(\alpha^*, \beta) = \langle\alpha|O|\beta\rangle$ 是二元复变函数。

由于相干态下正则排序算符期待值计算的便利性, 可以想象, 这样的相干态展开对于密度矩阵是重要的,

$$\begin{aligned} \rho &= \int d^2\alpha d^2\beta \frac{1}{\pi^2} |\alpha\rangle\langle\alpha|\rho|\beta\rangle\langle\beta| \\ &= \int d^2\alpha d^2\beta P(\alpha^*, \beta) |\alpha\rangle\langle\beta| \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $P(\alpha^*, \beta)$ 叫做”正值 P 函数”, 是二元复变函数。

B. 复平面积分

接下来我们要运用一些复平面积分的公式, 这儿先总结一下:

按照复平面积分定义,

$$\int d^2\alpha f(\alpha, \alpha^*) = \int d\alpha_r d\alpha_i f(\alpha_r + i\alpha_i, \alpha_r - i\alpha_i). \quad (19)$$

记 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)$, 那么在直角坐标系下有

$$\int d^2\alpha f(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{2} \int dx dp f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip), \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip)\right). \quad (20)$$

当然, 我们可以以极坐标参数化, $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$, 那么有

$$\int d^2\alpha f(\alpha, \alpha^*) = \int_0^\infty d|\alpha| \int_0^{2\pi} d\varphi f(|\alpha|e^{i\varphi}, |\alpha|e^{-i\varphi}). \quad (21)$$

接下来, 我们对函数的自变量表达宽松一些, 常常用 $f(\alpha)$ 代表 $f(\alpha, \alpha^*)$, 也常常用 $f(x, p)$ 代表 $f(\alpha, \alpha^*)$ 。

1. 傅里叶变换

考虑积分变换:

$$F(\beta) = \int d^2\alpha e^{\beta^* \alpha - \alpha^* \beta} f(\alpha) \quad (22)$$

令 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip), \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP)$, 则上式可以写为:

$$F(X, P) = \frac{1}{2} \int dx dp e^{ixP - ipX} f(x, p) \quad (23)$$

即对 $f(x, p)$ 做二维傅里叶变换 (多一个 $1/2$ 因子)。

反傅里叶变换为:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^2\beta e^{-\alpha^*\beta + \beta^*\alpha} F(\beta) \quad (24)$$

上述傅里叶变换公式 (22)(24) 和如下复狄拉克函数等式相联系:

$$\int d^2\alpha e^{\beta^*\alpha - \alpha^*\beta} = 2\pi^2 \delta^{(2)}(\beta) \quad (25)$$

其中 $\delta^{(2)}(\beta) = \delta(\beta_r)\delta(\beta_i)$ 。

C. 密度算符的 Q-表示和 P-表示

回到式 (18), 由于相干态的超完备性, 我们发现实际上 ρ 可以有如下 P 表示:

$$\rho = \int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (26)$$

其中复变函数 $\mathcal{P}(\alpha, \alpha^*)$ 称为密度矩阵的 P-函数。这个是很让人惊讶的: 算符常常可以在相干态表象里面形成对角化的表示。

和 P-表示对应的有 Q-表示:

$$\mathcal{Q}(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \quad (27)$$

将式 (27) 带入到 (26) 可得,

$$\mathcal{Q}(\alpha, \alpha^*) = \mathcal{P}(\alpha, \alpha^*) * \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \quad (28)$$

其中 $*$ 代表卷积: $f(x) * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$.

举例来说, 对于相干态 $\rho = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\alpha, \alpha^*) &= \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha - \alpha_0|^2}, \\ \mathcal{P}(\alpha, \alpha^*) &= \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0). \end{aligned} \quad (29)$$

对于数态 $\rho = |n\rangle\langle n|$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\alpha, \alpha^*) &= \frac{|\alpha|^{2n}}{\pi n!} e^{-|\alpha|^2}, \\ \mathcal{P}(\alpha, \alpha^*) &= \dots \end{aligned} \quad (30)$$

P -表示和 Q -表示有啥用? 我们考虑某个观测量 $O(a, a^\dagger)$, 由于 a, a^\dagger 不互易, 对其泰勒展开可以很多种方式, 其中有

$$\begin{aligned} O(a, a^\dagger) &= \sum_{m,n} O_{m,n}^A a^m (a^\dagger)^n, \\ O(a, a^\dagger) &= \sum_{m,n} O_{m,n}^N (a^\dagger)^m a^n. \end{aligned} \quad (31)$$

其中第一行方法叫“反正则展开”，第二行方法叫“正则展开”。可以证明

$$\begin{aligned}\langle O(a, a^\dagger) \rangle &= \int d^2\alpha O^A(\alpha, \alpha^*) \mathcal{Q}(\alpha, \alpha^*), \\ \langle O(a, a^\dagger) \rangle &= \int d^2\alpha O^N(\alpha, \alpha^*) \mathcal{P}(\alpha, \alpha^*)\end{aligned}\quad (32)$$

其中 $O^A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} O_{m,n}^A \alpha^m (\alpha^*)^n$, $O^N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} O_{m,n}^N \alpha^{*m} (\alpha)^n$ 按照式 (31) 的定义。

式 (32) 将算符期待值的计算转换为二维复变函数的积分，在研究一些系统解析性的时候比较有用。此外，由于式 (11)， \mathcal{Q} -函数， \mathcal{P} -函数的 $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ 复平面分布均在一定程度上体现了电场正交分量的二维分布。更加一般的， \mathcal{Q} ， \mathcal{P} -函数一定程度上体现了 (x, p) 一维运动的相空间分布。然而真正的经典像空间分布函数 $\rho_c(x, p)$ 需要满足“边缘分布”条件，

$$f(x) = \int dp \rho_c(x, p) \quad (33)$$

即沿着动量分布积分后，能给出实空间密度分布 $f(x)$ ，这个性质只有接下来要介绍的魏格纳函数才有。

III. WIGNER 函数

密度矩阵 ρ 对应的魏格纳函数 $w(\alpha, \alpha^*)$ 定义为

$$\begin{aligned}w(\alpha, \alpha^*) &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^2\beta \text{trace}(\rho D(\beta)) e^{\beta\alpha^* - \beta^*\alpha} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^2\beta \text{trace}(\rho e^{\beta(a^\dagger - \alpha^*) - \beta^*(a - \alpha)})\end{aligned}\quad (34)$$

由式 (22)，上式第一行是说，魏格纳函数是 $W(\beta) \equiv \text{trace}(\rho D(\beta))$ 的二维傅里叶变换。

由式 (25)，上式第二行是说，该魏格纳函数的经典极限正是经典力学的相空间分布函数。为更加明显的看出这一点，我们做变量代换，

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip) \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP)\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}w(x, p) &= \frac{1}{4\pi^2} \int dXdP \text{trace}(\rho e^{iX(\hat{p}-p) - iP(\hat{x}-x)}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int dXdP \text{trace}(\rho e^{iX(\hat{p}-p)/2} e^{-iP(\hat{x}-x)} e^{iX(\hat{p}-p)/2}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int dXdP \text{trace}(e^{iX(\hat{p}-p)/2} \rho e^{iX(\hat{p}-p)/2} e^{-iP(\hat{x}-x)}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int dXdP dx' \langle x' - \frac{X}{2} | \rho | x' + \frac{X}{2} \rangle e^{-iP(x'-x) - iXp} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dX \langle x - \frac{X}{2} | \rho | x + \frac{X}{2} \rangle e^{-iXp}\end{aligned}\quad (35)$$

由式 (35)，显而易见的是，

$$f(x_\theta) = \int dp_\theta w(x_\theta \cos\theta + p_\theta \sin\theta, p_\theta \cos\theta - x_\theta \sin\theta). \quad (36)$$

其中 $x_\theta = x \cos\theta - p \sin\theta$, $p_\theta = p \cos\theta + x \sin\theta$ 是”相空间” (x, p) 沿着 θ 方向的直角坐标。

对比式 (36) 式 (33) 表明, 魏格纳函数 $w(x, p)$ 是经典相空间分布函数 $\rho(x, p)$ 的量子对应。

A. 魏格纳函数和 P-,Q-函数的关系

$$w(\alpha, \alpha^*) = \mathcal{P}(\alpha, \alpha^*) * \frac{1}{2\pi} e^{-2|\alpha|^2} \quad (37)$$

B. 魏格纳函数举例

1. 考虑 $\rho = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$, 我们有:

$$\begin{aligned} w(\alpha, \alpha^*) &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^2\beta \langle\alpha_0| e^{\beta(a^\dagger - \alpha) - \beta^*(a - \alpha)} |\alpha_0\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^2\beta e^{-|\beta|^2/2 + \beta(\alpha_0^* - \alpha) - \beta^*(\alpha_0 - \alpha)} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-2|\alpha - \alpha_0|^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

在正交坐标 (x, p) 下, 我们有

$$w(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-((x-x_0)^2 + (p-p_0)^2)} \quad (39)$$

注意, 在薛定谔表象下,

$$|\alpha_0(t)\rangle = |\alpha_0 e^{-i\omega t}\rangle$$

因此: $x_0(t) = x_0 \cos(\omega t)$, $p_0(t) = p_0 \sin(\omega t)$.

对比牛顿力学的谐振子相空间密度分布见图 (1)。

2. 考虑 $\rho = \frac{1}{1+e^{-4|\alpha_0|^2}} (|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle)(\langle\alpha_0| + \langle-\alpha_0|)$, 我们有:

$$\begin{aligned} w(\alpha, \alpha^*) &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{1+e^{-4|\alpha_0|^2}} \int d^2\beta \langle\alpha_0| e^{\beta(a^\dagger - \alpha) - \beta^*(a - \alpha)} |\alpha_0\rangle + \\ &\quad \langle-\alpha_0| e^{\beta(a^\dagger - \alpha) - \beta^*(a - \alpha)} |-\alpha_0\rangle + \\ &\quad \langle\alpha_0| e^{\beta(a^\dagger - \alpha) - \beta^*(a - \alpha)} |-\alpha_0\rangle + c.c. \end{aligned} \quad (40)$$

IV. 相干态在“受迫振子”驱动下产生

我们考虑在电磁宇宙处于真空态, 中心放一个“受迫振子”, 其电偶极矩有含时振幅

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0 e^{-i\omega_0 t} + c.c.$$

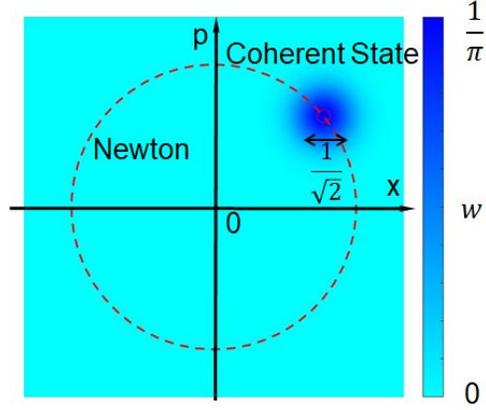


图 1. Comparison between the phase Space density distribution of a harmonic oscillator (dashed line) and a coherent state (color countour).

我们考虑电偶极相互作用,

$$V = - \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{d}_0(t) \delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

在相互作用表象下, 有

$$H = - \sum_l \mathcal{E}_l(0) \cdot d_0^* e^{-i(\omega_l - \omega_0)t} a + h.c. + \mathcal{E}_l(0) \cdot d_0 e^{-i(\omega_l + \omega_0)t} a + h.c. \quad (41)$$

由于宇宙初态是真空, $|\psi(t=0)\rangle_{EM} = |V\rangle$, 由薛定谔方程, 我们可以写出

$$|\psi(t)\rangle = \hat{T} e^{i \int_0^t (g_l e^{i(\omega_l - \omega_0)\tau} + g_l^* e^{i(\omega_l + \omega_0)\tau}) a_l^\dagger + h.c.} |V\rangle, \quad (42)$$

$$= \prod_l D_l(\alpha_l) |V\rangle$$

注意, 上式从第一到第二行, 自由场不同模式的升降算符是互易的。在上式中我们定义了“单光子拉比频率”,

$$g_l = \mathcal{E}_l \cdot \mathbf{d}_0 / \hbar \quad (43)$$

同时, 为了表达式的简便, 我们约定光场的模式函数 $\mathcal{E}_l(0) \in R$ 是实数。而 $D_l(\alpha_l) = e^{\alpha_l a_l^\dagger - \alpha_l^* a_l}$ 是位移算符, 位移量

$$\alpha_l(t) = i \int_0^t (g_l e^{i(\omega_l - \omega_0)\tau} + g_l^* e^{i(\omega_l + \omega_0)\tau}) d\tau \quad (44)$$

$$= (e^{i(\omega_l - \omega_0)t} - 1) \frac{g_l}{\omega_0 - \omega_l} + (e^{i(\omega_l + \omega_0)t} - 1) \frac{g_l^*}{\omega_0 + \omega_l}$$

我们考虑近共振驱动, 经典偶极子的频率 ω_0 和真空场频率 ω_l 接近, $|\omega_0 - \omega_l| \ll \omega_0, \omega_l$, 那么第二项显得很小, 可以忽略。这个第二项称作“反旋转波”项, 其忽略过程是“旋转波近似”, 详见下。

特别的, 对于 $\omega_l = \omega_0$ 的共振模式, 我们有 $\alpha_l(t) = i g_l t$ 随驱动时间线性增长。

事实上, 以上推导也可以在海森堡表象下展开, 我们有降算符 a 的运动方程:

$$i \dot{a}_l = -g_l e^{i(\omega - \omega_0)t} - g_l^* e^{i(\omega + \omega_0)t} \quad (45)$$

这样, 就制造出相干态光场了。我们还可以通过调制 $\mathbf{d}(t)$ 的振幅和相位来调制出射光的振幅和相位。可是, 这个经典振荡的 $\mathbf{d}(t)$ 怎么产生呢?

V. 二能级原子和单模光场的偶极相互作用

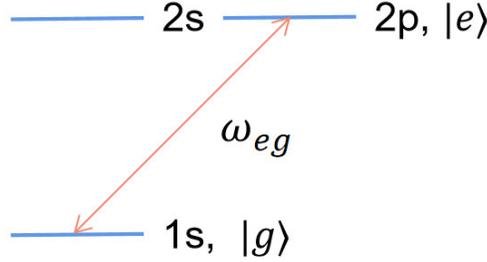


图 2. Two level system

如何从量子世界产生相干态？这个问题的理解可以首先从单原子和光场的相互作用出发，相互作用形式仍然是电偶极， $V = -\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{d}}$ ，只是偶极子是算符形式，可以在原子哈密顿量本征态 $|n\rangle$ 下展开为

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_{m,n} \mathbf{d}_{mn} e^{i\omega_{mn}t} |m\rangle\langle n| + h.c. \quad (46)$$

以下我们考虑由两个凹面镜构成的光学腔内的高斯模式 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_G(\mathbf{r})$ ，其中心 $\mathbf{r}_\perp = 0, z = 0$ 处有一个原子，其基态 $|g\rangle$ 和某个电偶极激发态 $|e\rangle$ 之间的能级差 $\hbar\omega_{eg}$ 非常接近光学频率 ω (Fig. 2)，那么，我们可以忽略其他能级的存在（及姑且忽略其它光学模式），直接截断态空间，写出我们在相互作用表象下写出总哈密顿量：

$$\begin{aligned} H &= -\mathbf{E}(\mathbf{r} = 0, t) \cdot \hat{\mathbf{d}}(t) \\ &= -\hbar g e^{-i(\omega - \omega_{eg})t} a \sigma^+ + h.c. \\ &\quad - \hbar g^* e^{-i(\omega + \omega_{eg})t} a \sigma^- + h.c. \end{aligned} \quad (47)$$

其中有二能级偶极算符

$$\hat{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{d}_{eg} e^{i\omega_{eg}t} |e\rangle\langle g| + h.c. \quad (48)$$

以及单模电场算符

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_G(\mathbf{r}) a e^{-i\omega t} + h.c. \quad (49)$$

$g = \mathcal{E}(0) \cdot \mathbf{d}_{eg}/\hbar$ 称为“单光子拉比频率”（还是约定 $\mathcal{E}(0) \in R$ ），而 $\sigma^+ = |e\rangle\langle g|$ 是二能级原子的升算符， $\sigma^- = |g\rangle\langle e|$ 为降算符。

A. 旋转波近似

式 (47) 第二、三行的意义都很明确：第一行的意思是原子被激发（从 $|g\rangle$ 到 $|e\rangle$ ），光子湮灭一个（ a 作用），而 $h.c.$ 是说原子退激发（从 $|e\rangle$ 到 $|g\rangle$ ），光子产生一个（ a^\dagger 作用）。这个读起来很顺。

第二行就奇怪了：原子被激发，同时光子产生一个；或者原子退激发，同时光子湮灭一个。这样的过程显得不自然。事实上，从相干的耦合系数含时性来看，第二项是 $e^{i(\omega + \omega_{eg})t}$ ，在我们的近共振前提下，振荡速度远大于第一项的 $e^{i(\omega - \omega_{eg})t}$ 。

这个第二行相互作用被称为“反旋转波”项，在相互作用中是一个极度能量不守恒的项，因此只有在非常短的时间尺度上才得以体现。我们常常将之忽略，得到旋转波近似下的相互作用哈密顿量：

$$H_{\text{rot}} = -\hbar g e^{-i(\omega - \omega_{eg})t} a \sigma^+ + h.c. \equiv H_{\text{JC}} \quad (50)$$

下面我们忽略 H_{rot} 的下标。事实上，式 (50) 是著名的 Jaynes-Cummings 模型的哈密顿量，所以我们又记之为 H_{JC} 。

B. 单光子拉比振荡

接下来我们考察式 (50) 对应希尔伯特空间的动力学。该 J-C 哈密顿量，在本课程的后半部分腔电动力学中会详细介绍。这儿我们首先考察一个最简单的情况：第一激发态动力学。我们考虑原子 + 电磁场联合系统的初态是：

$$|\psi(t=0)\rangle = |e, V\rangle, \quad (51)$$

即原子处在激发态，光场在真空。那么，观察式 (50) 哈密顿量，我们发现系统态矢量的演化必然可以分解为：

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t)|e, V\rangle + c_g(t)|g, 1\rangle$$

薛定谔方程可以写为：

$$\begin{aligned} i\dot{c}_e &= -g e^{-i(\omega - \omega_{eg})t} c_g \\ i\dot{c}_g &= -g^* e^{i(\omega - \omega_{eg})t} c_e \end{aligned} \quad (52)$$

这个二阶常微分方程解法很多，包括傅里叶变换等。注意到我们可以通过接下来会详细介绍的“旋转波变换”将这个方程变成不含时的二阶微分方程：令 $c_e \rightarrow c_e e^{-i\omega_{eg}t/2}$, $c_g \rightarrow c_g e^{i\omega_{eg}t/2}$, 可得：

$$\begin{aligned} i\dot{c}_e &= \frac{\Delta}{2} c_e - g c_g \\ i\dot{c}_g &= -\frac{\Delta}{2} c_g - g^* c_e \end{aligned} \quad (53)$$

这个方程就可以运用接下来我们要说的布洛赫球方法了。在此不赘述，仅考察 $\Delta = \omega - \omega_{eg} = 0$ 的共振情形。此时有：

$$c_e(t) = \cos(|g|t)$$

$$c_g(t) = i \sin(|g|t)$$

见图 (3)。

因此，在单模光场和二能级原子腔耦合的情况下，原子和光场可以实现相干的能量交换。实际情况下，原子和其他电磁波模式的耦合难以被忽略，式 (52) 将被扩展为无穷维的微分方程组，相应解法必须用到含时微扰技术才能提取有用信息。

C. 激光原理简介

激光，英文是 Laser, 全称是“受激辐射的光放大”。因此，激光和“光放大”物理密不可分。理解“光放大”的一个好的方法是首先理解“光减弱”。我们回到式 (50)，

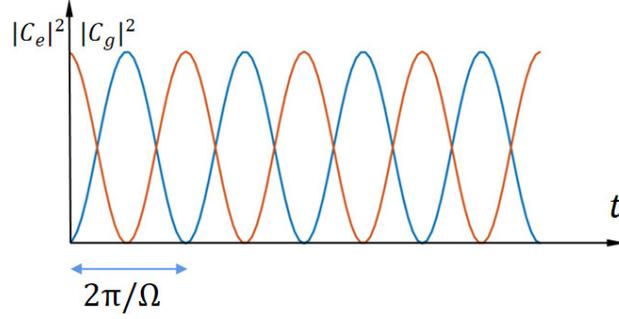


图 3. Two level system

$$H_{JC} = -\hbar g e^{-i(\omega - \omega_{eg})t} a \sigma^+ + h.c.$$

我们试着写出体系的海森堡方程。运用这些互易关系: $[a, a^\dagger] = 1$, $[\sigma^-, \sigma^+] = \sigma_z$, $[\sigma^-, \sigma_z] = -2\sigma^-$, $[\sigma^+, \sigma_z] = 2\sigma^+$, 有

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= -g^* e^{i\Delta t} \sigma^-, \\ i\dot{\sigma}^- &= g e^{-i\Delta t} a \sigma_z, \\ i\dot{\sigma}^+ &= -g^* e^{i\Delta t} a^\dagger \sigma_z, \\ i\dot{\sigma}_z &= (2g e^{-i(\omega - \omega_{eg})t} a \sigma^+ - h.c.) \end{aligned} \quad (54)$$

式 (54) 看起来并不复杂, 但注意是算符方程, 实际上是没有解析解的。我们考虑式 (54) 算符的期待值: $\bar{a} = \langle a \rangle$, $\bar{\sigma}^\pm = \langle \sigma^\pm \rangle$, 及 $\bar{\sigma}_z = \langle \sigma_z \rangle$. 进一步, 我们考虑一个“瞬态过程”, 二能级原子被制备在基态, $|\psi(0)\rangle = |g\rangle$, 所以有 $\bar{\sigma}_z(0) = -1, \bar{\sigma}_\pm(0) = 0$. 那么在初始时刻, 式 (54) 的前两个方程可以近似写为:

$$\begin{aligned} i\dot{\bar{a}} &= -g^* e^{i\Delta t} \bar{\sigma}^-, \\ i\dot{\bar{\sigma}}^- &= -g e^{-i\Delta t} \bar{a}. \end{aligned} \quad (55)$$

这个方程从形式上来说, 和我们已经介绍的“单光子拉比振荡”类似了。我们仅考虑一个最简单的情况, $\Delta = \omega - \omega_{eg} = 0$ 共振, 且光子态的初态是 $|\alpha\rangle$ 态, 因此有 $\bar{a}(0) = \alpha$. 我们同时将 g 的相因子吸收到 a 里面, 就有:

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) &= \alpha \cos(|g|\delta t), \\ \bar{\sigma}^-(t) &= i\alpha \sin(|g|\delta t). \end{aligned} \quad (56)$$

显然, 这个式子只有在 $|\alpha g|\delta t \ll 1$ 的时候是成立的。我们发现在初期, 光场的振幅 α 随时间会下降, 原子的相干性 $\bar{\sigma}^-(t)$ 会随时间上升。

接下来我们考虑“连续注入”场景。考虑一串 $|g\rangle$ 基态的原子依次通过光学腔, 和光场作用, 并且在 $\delta t \ll 1/|\alpha(t)g|$ 的一段 δt 时间后离开。因此从光场看来, 好像源源不断地总有基态原子出现, 稍被激发后就离开了。可以预期, 这些原子对光的吸收将导致相干态振幅最后衰减到零: $\alpha(t) \rightarrow 0$ 。

好了，接下来我们考虑另一个情况，注入激发态原子 $|e\rangle$ ，式 (55) 改写为：

$$\begin{aligned} i\dot{\bar{a}} &= -g^* e^{i\Delta t} \bar{\sigma}^-, \\ i\dot{\bar{\sigma}}^- &= g e^{-i\Delta t} \bar{a}. \end{aligned} \quad (57)$$

我们同样发现，在 $\Delta = 0$ 共振时，有

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) &= \alpha e^{|\alpha| \delta t}, \\ \bar{\sigma}^-(t) &= i\alpha(e^{|\alpha| \delta t} - 1), \end{aligned} \quad (58)$$

如果我们源源不断地注入 $|e\rangle$ 原子，那么最后会有：

$$\bar{a}(t) \rightarrow \alpha e^{|\alpha| t} \quad (59)$$

被指数放大。

考虑一下：如果 $\alpha = 0$ ，即光场的初态时真空态，会是啥情况？在被激发态原子源源不断地“泵浦”的情形下，真空态是不稳定的，任何一下小的 \bar{a} 振幅都会被指数放大。事实上，这样的情况下光场的振幅会发生“自发对称破缺”，选择一个相位后，以 $\alpha(t)$ 不断被“自激”振荡放大。当然，这样的放大最后会被两类损耗抵消，第一类是线性损耗，我们计做 $\dot{\bar{a}} = -\kappa/2\bar{a}$ ，这个 κ 因子可以是因为光学腔漏光，我们下学期会详细解释。另以方面，当光振幅太强后，式 (57) 的初始态近似就不成立了 ($|\alpha g| \delta t \ll 1$ 越来越难被满足)，激发态原子带来的光场增益效应会饱和，我们计这个效应为 $\dot{\bar{a}} = -\gamma|\bar{a}|^2\bar{a}$ ，结合式 (57)，我们可以形式化的写出：

$$\dot{\bar{a}} = (|g| - \frac{\kappa}{2} - \gamma|\bar{a}|^2)\bar{a} \quad (60)$$

这个方程是最简单的激光模型，却涵盖了重要的物理思想。记生成该方程的势能函数为 $V(\alpha)$ ，满足 $\dot{\alpha} = \partial_{\alpha^*} V(\alpha)$ ，有

$$V(\alpha) = (|g| - \frac{\kappa}{2})|\alpha|^2 - \frac{1}{2}\gamma|\alpha|^4 \quad (61)$$

我们将 $V(\alpha)$ 展示于图 (4) 的相空间。

1) 阈值及非线性稳定解：

阈值以下， $|g| < \kappa/2$ ，系统在真空态 $\bar{a} = 0$ 是稳定的。

阈值以上， $|g| > \kappa/2$ ，存在一类非线性稳定解：

$$\bar{a}_L = \sqrt{\frac{|g| - \kappa/2}{\gamma}} e^{i\phi} \quad (62)$$

注意，这儿光场的相位 ϕ 完全是不确定，随机的。

2) 自发对称性破缺

从阈值以下到阈值以上，在像空间（魏格纳函数）看来系统的稳定解由真空态移动到以 \bar{a}_L 为半径的圆上。实际情况是任何一点 $U(1)$ 非对称微扰都会导致系统选择一个相位 ϕ_{ssb} ，系统态矢量从而会逼近相干态 $|\alpha_{\text{ssb}}\rangle$

$$\alpha_{\text{ssb}} = \sqrt{\frac{|g| - \kappa/2}{\gamma}} e^{i\phi_{\text{ssb}}} \quad (63)$$

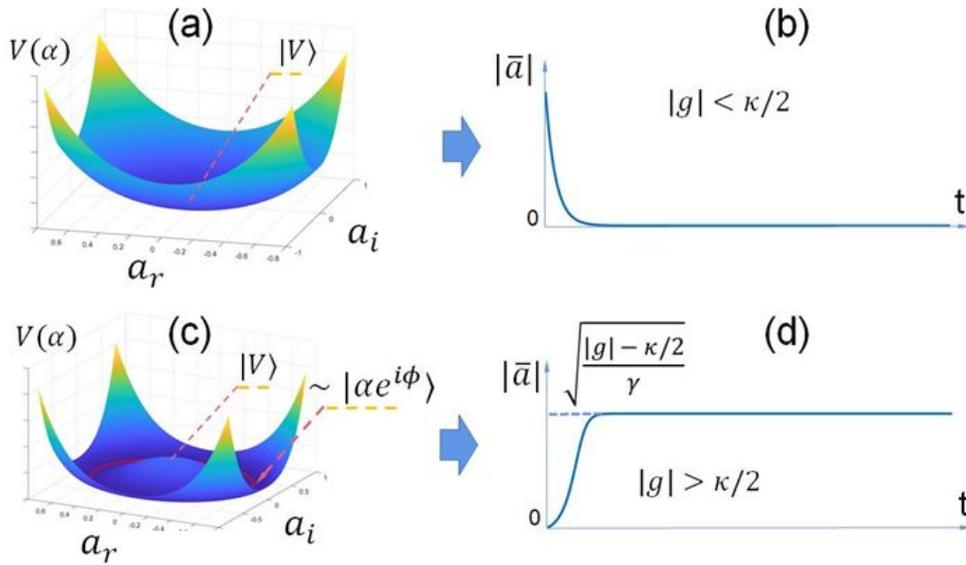


图 4. Laser action as a process of spontaneous breaking of U(1) symmetry (a,c) and corresponding light field evolution (b,d).

在这样理想状态下，激光的线宽由相位的随机行走速度决定： $\Delta f \sim \sqrt{\langle (\dot{\phi}_{\text{ssb}})^2 \rangle}$ 。随机行走的驱动力，和光学模式本身的线性耗散 κ 相关，也和二能级原子的自发辐射 Γ （再下节课介绍）相关，通过对增益介质稳态泵浦下受激辐射光放大更加细致的分析，可以得到著名的 Schawlow-Townes 激光线宽公式：

$$\frac{\Delta f_{\text{ST}}}{f} = \frac{\hbar}{2P_{\text{out}}} \left(\frac{\gamma_{\perp} \kappa}{\gamma_{\perp} + \kappa} \right)^2, \quad (64)$$

其中 f 是激光本身的中心频率， $f = \omega/2\pi = \omega_{eg}/2\pi$ 。 $\gamma_{\perp} \sim \Gamma/2$ 是二能级原子的“横向弛豫”常数。 P_{out} 是稳态运行下激光的输出功率。实际情况下，在光学波段，由于光学腔机械振动等各种原因，这个极限是非常难达到的，

D. 微波激光

氢钟和 21 厘米线

E. 激光要素

最后，实际生活中的激光可以总结以下如下三个要素：

- 1) 光学腔
- 2) 增益介质
- 3) 阈值上模式竞争

连续激光

锁模激光

VI. 第一次作业的第三部分

1. 请结合上下文，详细推导式 (17).
2. 请结合上下文，详细推导式 (28).
3. 试结合上下文，证明式 (32).
4. 请结合上下文，详细推导式 (35).
5. 请结合上下文，完成式 (40) 的推导，写出 $w(\alpha, \alpha^*)$ 的最终表达式，并就 $\alpha_0 = 3 + 2i$ 在 (α_r, α_i) 二维平面作图。
6. 考察式 (51) 初条件，及薛定谔方程式 (52)。如果我们将初条件改为更加一般的 $|\psi(t=0)\rangle = |e, n\rangle$ ，即原子初始时刻在基态，而单模光场在 n 光子 Fock 态，请给出相应的 $|\psi(t)\rangle$ 表达式，及和式 (52) 类似的运动方程。