

光测量和光子统计

吴赛骏*

物理系, 复旦大学, 上海 200433, 中国。

I. 光子计数, 光强测量, 联合光子计数

我们在上节课介绍了原子钟。原子在被初始化到 $|g\rangle$ 态, 上抛后两次经过和 $|g\rangle - |e\rangle$ 跃迁近共振的微波腔, 最后我们通过测量 ρ_{ee} 或者 σ_z 来推测微波腔频率 ω 和原子跃迁频率 ω_{eg} 的差值。

这个里面的关键一步是态测量。例如, 对于 ^{133}Cs 原子钟, $|g\rangle$ 对应于 $6S_{1/2}, F = 3, m_F = 0$, $|e\rangle$ 对应于 $6S_{1/2}, F = 4, m_F = 0$ 。我们需要有一个测量装置来检测原子的存在, 并且区分出这两个原子态。

最直接的区分方法, 是用共振激光驱动”循环跃迁“, 收集共振荧光 (图 (1c))。

[注] 这儿“循环跃迁”是指原子被激光激发以后, 自发辐射落回的态正是初态。在如图 (1c) 的铯原子钟探测中, 循环跃迁是 $6S_{1/2}F = 4 \leftrightarrow 6P_{3/2}F' = 5$ 。

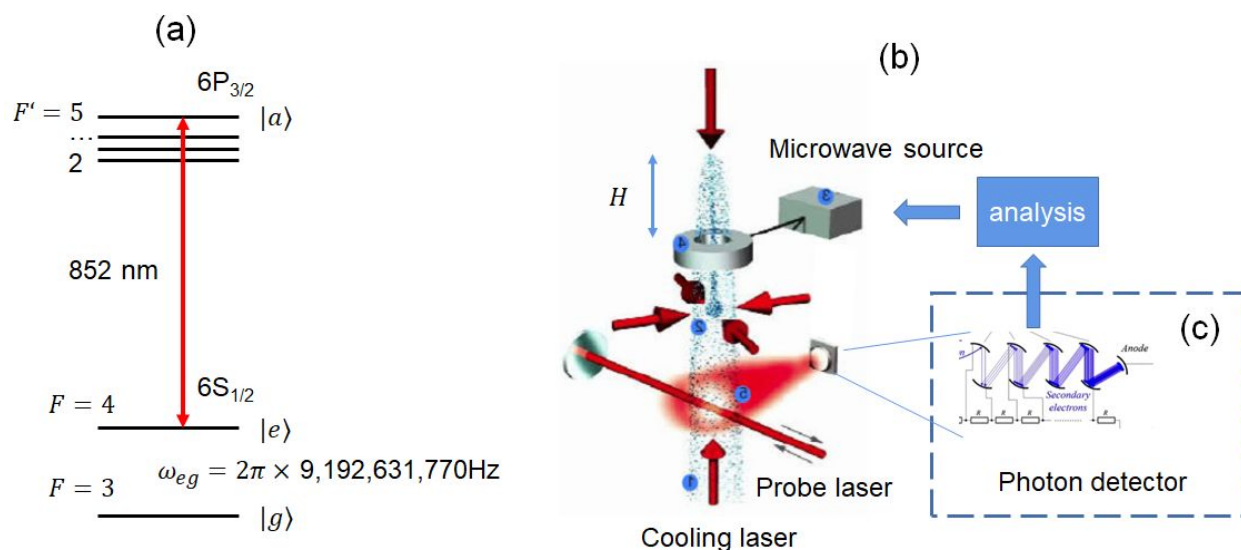


图 1. Elementary structure of a ^{133}Cs atomic fountain clock. The photo-detector is emphasized in (c).

这个地方我们就牵涉到光子计数这个问题。

A. 光子计数过程的量子力学描述

如图 (1c), 一般来说, 我们考察宇宙的光场量子态为 $|\psi_{EM}\rangle$, 我们在空间 \mathbf{r} 放置了一个光电探测器, 截面大小为 δA , 截面的”右边“是光电倍增器件, 探测”左边“空间的光场。其量子态, 以及宇宙中其他物质的量子态, 统记为 $|\psi_i\rangle$ 。那么宇宙波函数可以写为 $|\Psi_i\rangle = |\psi_{EM}\rangle|\psi_i\rangle$ 。在 t 到 $t + \delta t$ 时间内出现光电激发过程, 有光子激发了光电探测器的探头, 产生光电子。该光电子被加速, 触发了光电倍增机制, 最终形成了一个宏观电流脉冲 – 可以想象, 无论这个电流是否被人类发现, 整个宇宙的波函数就都改变了。

如图 (1c) 的光电倍增管的物理描述实际上是极其困难的 – 目前物理学界的基本共识, 是人类尚不会描述这样的时间不可逆过程。然而如果我们仅关系单光子探测概率, 那么还是可以考察运用量子力

* saijunwu@fudan.edu.cn

学来描述探测器第一个“阴极”的光电发射过程。具体来说，我们考察图 (2) 中光场激发导致光电子发射。注意在相互作用期间，阴极金属的众多价带电子和光场的相互作用仍然可以等效为偶极相互作用。我们有

$$\begin{aligned}\delta P^{(1)}(\mathbf{r}, t; \delta A, \delta t) &= \frac{1}{\hbar} \sum_f \int_t^{t+\delta t} d\tau \left| \langle \Psi_f | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \tau) \cdot \sum \mathbf{d}_j(\tau) | \psi_{EM}, \psi_i \rangle \right|^2 \\ &= \sum_f \eta_f \left| \langle \Psi_f | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi_{EM}, \psi_i \rangle \right|^2\end{aligned}\quad (1)$$

注意，这儿我们有一个假设：既然是记录了一个光子，那么光场的光子必然是被“湮灭”掉一个，因此电偶极相互作用 $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ 中，我们一定取 $\mathbf{E}^{(+)} = \sum \epsilon_i e^{-i\omega t} a_i$ 这项。而权重因子 η_f 和相关跃迁强度，探测器面积 δA ，时间 δt 相关。

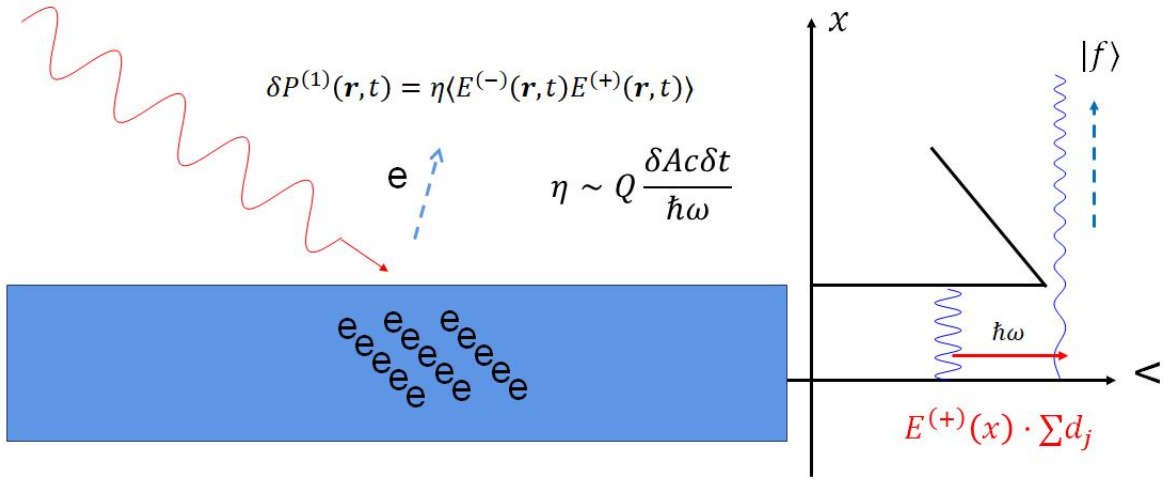


图 2. Generation of photon-electron during the initial stage of a photon-counting process.

接下来，我们需要对宇宙的所有末态 $|\Psi_f\rangle$ 求和。注意到 $\sum_f |\Psi_f\rangle \langle \Psi_f| = 1$ ，因此有：

$$\delta P^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \eta \langle \psi_{EM} | \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi_{EM} \rangle \quad (2)$$

注意，获得上式过程中一个近似：是权重较大的末态系数 $\eta_f = \eta$ 是差不多大的，这个近似可以理解光电探测头中的电子密度较大，因此存在大量类似激发强度的末态。

探测效率可以写为

$$\eta \sim Q \frac{c\delta A\delta t}{\hbar\omega}, \quad (3)$$

Q 为探测器的“量子效率”，我们有 $\max(Q)=1$ 。

当然，我们可以定义光子数强度算符

$$i(\mathbf{r}, t) = \frac{c\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)}{\hbar\omega} \quad (4)$$

那么我们还有：

$$\delta P^{(1)}(\mathbf{r}, t) \sim Q\delta A\delta t \langle \psi_{EM} | i(\mathbf{r}, t) | \psi_{EM} \rangle \quad (5)$$

我们可以将式 (2) 的量子力学推导推广到双光子探测：

$$\delta P^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \eta^2 \langle \psi_{\text{EM}} | \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | \psi_{\text{EM}} \rangle \quad (6)$$

更加一般的， N -光子联合计数概率：

$$\begin{aligned} \delta P^{(N)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_N, t_N) &= \eta^N \langle \psi_{\text{EM}} | \underbrace{\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \dots \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)}_{2N} | \psi_{\text{EM}} \rangle \quad \text{or,} \\ &= \eta^N \text{trace}(\rho_{\text{EM}} \underbrace{\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \dots \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)}_{2N}) \end{aligned} \quad (7)$$

在式 (7) 第二行，我们将光场纯态的光子数联合测量推广到混合态。注意，为记号简捷，我们常常将 $\text{trace}(\rho \dots)$ 简记为 $\langle \dots \rangle$ 或者 \dots 。

式 (7) N -光子联合计数概率一般表达式的特点：

1) 由上述推导（首先由 Roy Glauber 给出），联合光子计数的概率计算必须是自由电磁场算符的正则排序。

2) 因为自由电磁场的正频分量互易，负频分量也互易，因此其顺序并不重要。

3) 在获得式 (3) 时，我们假设探测器的量子效率和光场偏振无关。因此，式 (7) 以及下面要介绍的式 (19) 中电磁算符矢量的乘积在计算上直接更替为点积即可。

4) 我们隐含了重要及“不合理”假设：光子计数器的物理存在，并不对光场的模式分布产生影响。这个假设实际上是有问题的，我们在做一个“物理基础不牢靠”的思想实验 – 从目前的科学发展看来，问题不大。

此外，同学们注意到我在式 (3)，式 (5) 中用了“ \sim ”符号，而不是等号“ $=$ ”。原因是对探测效率 η 的理解，牵涉到光场模式的传播方向是否和探测器平面垂直这个问题，在此不做进一步讨论。

B. 强度关联函数

我们可以比较 N 光子联合计数概率 $\delta P^{(N)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_N, t_N)$ 及单光子探测概率积 $\prod_j^N \delta P^{(1)}(\mathbf{r}_j, t_j)$ ，定义光强关联函数：

$$g^{(N)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_N, t_N) = \frac{\delta P^{(N)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_N, t_N)}{\prod_j^N \delta P^{(1)}(\mathbf{r}_j, t_j)} \quad (8)$$

特别是对于时间和空间上强度分布均匀的多模光场来说，我们有 $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = g^{(2)}(0, 0; \Delta \mathbf{r}, \Delta t)$ ，因此有时也将光场二阶强度关联函数简记为 $g^{(2)}(\Delta \mathbf{r}, \Delta t)$ 。

由统计学基本假设：如果 $j = 1, \dots, N$ 探测事件是完全独立的，那么自然有 $g^{(N)} = 1$ 。实际情况是 $g^{(N)}$ 反应了量子光场的时空关联： j -探测器的测量结果会影响 j' 探测器的测量结果。我们举如下例子。为简单起见，我们仅考虑单频稳态光场，因此可以忽略时间指标 t 。

C. 单模光场的光子统计

我们考虑电磁场仅存在某个单模 \mathcal{E}_i 的激发：

$$|\psi\rangle = f(b_i^\dagger) |V\rangle$$

1. 单模 Fock 态

$$f(b_1^\dagger) = \frac{(b_1^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}$$

我们考虑单光子探测概率:

$$\begin{aligned}\delta P^{(1)}(\mathbf{r}) &= \eta \langle n | \mathbf{E}^-(\mathbf{r}) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}) | n \rangle \\ &= \eta n |\mathcal{E}_1(\mathbf{r})|^2\end{aligned}$$

双光子探测联合概率:

$$\begin{aligned}\delta P^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &= \eta^2 \langle n | \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_a) \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_a) | n \rangle \\ &= \eta^2 n(n-1) |\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_a) \mathcal{E}_1(\mathbf{r}_b)|^2\end{aligned}$$

因此有

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = 1 - 1/n. \quad (9)$$

这个很容易理解: 对于 n 光子 Fock 态来说, 单个探测器观测到光子当然和 n 成正比, 但是要是两个光子联合探测, 则第一个探测器已经探测到光子的情况下, 第二个探测器还能测到光子的概率就降低到和 $n-1$ 成正比了。

特别的, 对于单光子态来说, $g^{(2)} = 0$.

一般的, 我们自然有

$$g^{(m)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m) = \frac{n \dots (n-m+1)}{n^m}. \quad (10)$$

注意, 对于单模光场, 强度关联函数和探测器位置无关。

2. 单模热态

我们考虑光场模式 \mathcal{E}_1 密度矩阵为 $\rho_{mn} = (1 - e^{-\beta \hbar \omega_1}) e^{-n \beta \hbar \omega_1} \delta_{mn}$, 因此有单光子探测概率:

$$\begin{aligned}\delta P^{(1)}(\mathbf{r}) &= \eta \text{trace}(\rho \mathbf{E}^-(\mathbf{r}) \mathbf{E}^+(\mathbf{r})) \\ &= \eta \bar{n} |\mathcal{E}_1(\mathbf{r})|^2\end{aligned}$$

这儿 $\bar{n} = 1/(e^{\beta \hbar \omega_1} - 1)$ 是平均光子数。

双光子联合探测概率

$$\begin{aligned}\delta P^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &= \eta^2 \text{trace}(\rho \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_a) \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_a)) \\ &= \eta^2 \text{trace}(\rho a^\dagger a^\dagger a a) |\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_a) \mathcal{E}_1(\mathbf{r}_b)|^2 \\ &= 2\bar{n}^2 |\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_a) \mathcal{E}_1(\mathbf{r}_b)|^2\end{aligned}$$

因此有

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = 2 \quad (11)$$

事实上，我们发现 (参见式 (31))，对于热态来说，

$$g^{(n)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = n! \quad (12)$$

以上的热态结论好理解吗？热态的光子数分布函数是指数型的（在相空间是高斯型），“最概然”的光子数是零，平均是 \bar{n} 。式 (11)(12) 的意思，是如果在热态中测到一个光子，则混合态中大光子数态的概率增加，导致第二个光子的概率加倍，第三光子的概率三倍，等等。

3. 单模相干态

式 (7) 对场算符正则排序，因此显然有

$$\delta P^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \eta \langle \alpha | E^{(-)} E^{(+)} | \alpha \rangle = \eta |\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|^2 |\alpha|^2$$

以及 $\delta P^{(N)} = \prod_j \delta P_j(1)$,

$$g^{(n)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = 1 \quad (13)$$

即相干态下，不同探测器的光子计数是完全独立的。从这个性质上来看，相干态也是“最经典”的光子态。

嗯？难道“热态”“反而不是”最经典“的光子态？以下我们会看到，热态光子是“群聚”的，并不满足独立统计。所以，可以说，“热态”不是“最经典”的光子态。不过这个说法本身实际上也有些毛病：既然已经有光子，有光电效应了，“光子统计”的经典性意义并不十分明确。事实上，对于单模光子态来说，其“经典性”，有明确定义的判据是魏格纳函数正定： $w(\alpha, \alpha^*) \geq 0$ 。我们发现热态的魏格纳函数是高斯型：

$$w_{\bar{n}}(\alpha, \alpha^*) = \frac{1 + \bar{n}}{2\pi(1 + 2\bar{n})} e^{-|\alpha|^2/(1+2\bar{n})}, \quad (14)$$

其中 $\bar{n} = 1/(e^{\beta\hbar\omega} - 1)$ 是平均光子数。即热态是遵循正态分布的随机相干态，因此也是“经典”的。

D. 泊松分布和泊松过程

上述式 (9)(11)(13) 分别给出 $g^{(2)} < 1$, $g^{(2)} > 1$, $g^{(2)} = 1$, 在统计力学中，分别对应于亚泊松分布，超泊松分布，及泊松分布。

什么是泊松分布？泊松分布是泊松过程产生的分布函数，泊松过程描述的是非常普遍的随机计数过程，其考察的事件发生概率没有相关性，因此有事件 a, b 发生的联合概率决定于事件 a, b 分别独立发生的概率积： $P^{a,b} = P^a P^b$ 。

对于单模光场的光子计数来说，只有当光场量子态是相干态时，光子计数过程才是泊松过程。当然，说到这个点，我们需要提前强调，对于日常生活中常见的多模光场，在“相干体积” (式 (27)) 以外的关联测量，由于不同光场模式之间没有关联性，因此光子联合探测概率也满足泊松统计 (图 (11))。

接下来我们就 (\mathbf{r}, t) 处的光子探测，着重考察一下相干态光子计数的概率分布。由式 (13) 的 $g^{(n)} = 1$ ，由于在同一个时空点的光子计数没有先后排序问题，我们很容易发现，

$$\delta P^{(n)}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\delta P^{(1)})^n}{n!}$$

我们对探测到 n -光子的概率求和，得到

$$\sum \delta P^{(n)} = e^{\delta P^{(1)}}$$

这个看起来有些奇怪：所有可能性求和的话，总概率应该是归一的。我们对概率归一化，那么有：

$$\delta P^{(n)}(\mathbf{r}, t) = e^{-\delta P^{(1)}} \frac{(\delta P^{(1)})^n}{n!} \quad (15)$$

式 (15) 是泊松过程的标准形式。刻画满足独立统计，在 $[t, t + \Delta t]$ 内以一定发生率 $\Gamma = \delta P^{(1)}/\delta t$ 发生事件的发生次数 n 概率分布函数 $f(n) = P^{(n)}$ 的一般形式，

$$f(n) = e^{-\Gamma \Delta t} \frac{(\Gamma \Delta t)^n}{n!} \quad (16)$$

显然，对于任意 Δt 及平均光子数 $\bar{n} = \Gamma \Delta t$ ，我们都有 $\sum f(n) = 1$ 的归一化概率。式 (16) 当然也可以用于空间分布的统计。一般来说，泊松分布的单参数 Γ 是平均发生率的意思，紧紧抓到这点，同时确保光子计数确实有 $g^{(n)} \equiv 1$ ，就没有问题。

不只是光子计数，式 (16) 的日常用处，可以用如下两个案例描述（具体数值是编的）：

案例一：

按照当前宇宙学模型，地球被直径大于 1000 米的小行星撞击率 $\Gamma = 1/10^6 \text{ yr}$ 。那么，在 $\Delta t = 10^7 \text{ yr}$ 内，发生 0 次小行星撞击地球的概率为 e^{-10} （几乎不可能），至少发生一次的概率为 $1 - e^{-10}$ 几乎是 1。平均来说发生了 $\bar{n} = \Gamma \Delta t = 10$ 次撞击事件，而涨落为 $\Delta n = \sqrt{\bar{n}} = 3$ 次左右。

案例二：

江湾校区，天气好，中午校园大草坪平均学生数是 $\bar{n} = 10$ ，学生数为 $n = 5$ 的概率是 $e^{-10} 10^5 / 5! \approx 4\%$ 。（注意，这个例子假设人类没有群聚性，也没有反群聚性，去草坪完全基于独立思考和需求，不打算交朋友。且草原特别大，因此可以等效认为没有人数密度限制）

在我们课程中，另一个重要分布是二项式分布，考察的是重复“二元事件”的规律。如果事件 A 发生的概率为 P ， \bar{A} 的概率是 $1 - P$ ，那么重复 N 次过程， A 事件发生 M 次的概率为

$$P(M, N) = C_N^M P^M (1 - P)^{N-M}. \quad (17)$$

其中 $C_N^M = \frac{N!}{M!(N-M)!}$ 。

可以证明，式 (17) 在 $P \ll 1, \lambda = PN$ 为常数的大 N 极限下，和泊松分布等价：

$$P(M, N)_{P \rightarrow 0, PN \rightarrow \lambda} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^M}{M!} \quad (18)$$

II. 多模光场的场关联函数测量

首先，我们讨论一下为何刻画多模光场需要推广式 (7)，引入一阶光场-光场关联函数，

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\sqrt{\langle E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle} \sqrt{\langle E^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}} \quad (19)$$

对于时间和空间上强度分布均匀的多模光场来说，我们有 $g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = g^{(1)}(0, 0; \Delta \mathbf{r}, \Delta t)$ ，因此有时也将场关联函数简记为 $g^{(1)}(\Delta \mathbf{r}, \Delta t)$ 。

我们考察图 (3a) 的杨氏干涉实验。在双缝上方，是多模照明光场，我们在位于 $\mathbf{r}_{1,2}$ 的狭缝对光场取样，并在下方测量屏幕处观测杨氏条纹。

和同学们在光学课程上学到的一样，这个双缝实验其实比较麻烦：双缝挡光板的存在，其实会影响上方待测光场的分布，为合理刻画这种分布的改变，需要引入合理边条件，等。在此我们为论述简单，将挡光板的边条件设为“完美吸收”，就是说，其存在完全不影响上方的光传播。

我们考察屏幕处 \mathbf{r}_c 点在 t_c 时刻的光子计数概率，那么有

$$\delta P^{(1)}(\mathbf{r}_c, t_c) = \eta K_1^2 \langle E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle + \eta K_2^2 \langle E^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle + \eta K_1^* K_2 \langle E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle + c.c. \quad (20)$$

这儿我们应用了 $E(\mathbf{r}_c, t_c) = K_1 E(\mathbf{r}_1, t_1) + K_2 E(\mathbf{r}_2, t_2)$ ，且 $t_{1,2} = t_c - |\mathbf{r}_{1,2} - \mathbf{r}_c|/c$ 这个关系（惠更斯原理）。这样的光场算符变换对应于第三讲中提到的光场模式变换，只是变换前后的模式对应于模式函数演化的不同时间。

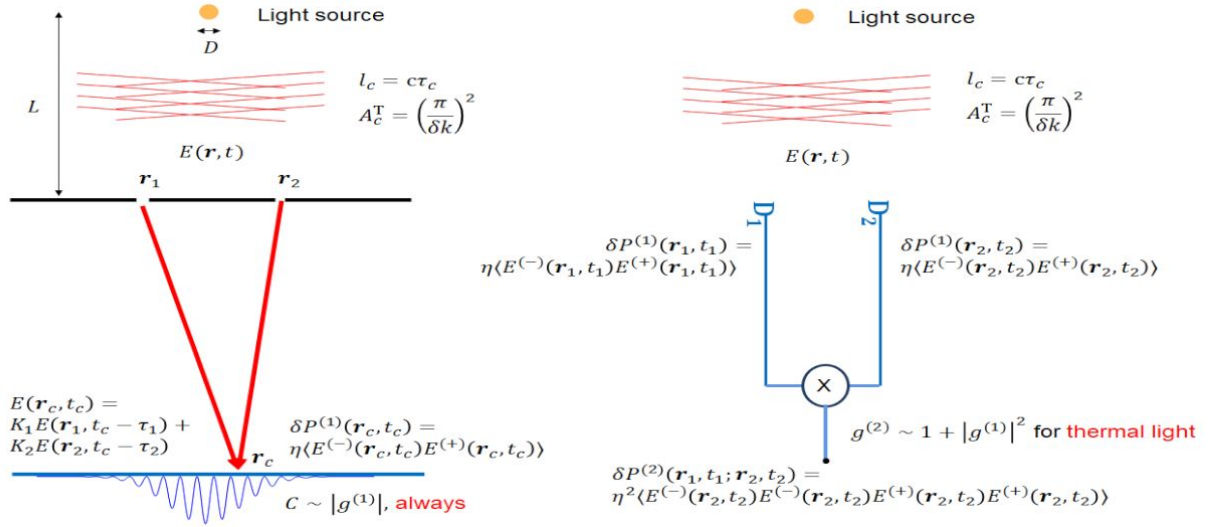


图 3. Measuring angular size of star by observing (a) contrast decay in Young's interference and (b) two-point light intensity correlation.

结合式 (20)(19)，我们有

$$\begin{aligned} \bar{I}(\mathbf{r}_c, t_c) &= \eta K_1^2 \bar{I}(\mathbf{r}_1, t_1) + \eta K_2^2 \bar{I}(\mathbf{r}_2, t_2) + |\eta K_1 K_2| \sqrt{\bar{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \bar{I}(\mathbf{r}_2, t_2)} g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) + c.c. \\ &\sim 2|K|^2 \bar{I}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{t}) \times \left(1 + \frac{1}{2} g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) e^{i\varphi} + c.c.\right) \end{aligned} \quad (21)$$

这儿我们简记 $I = E^- E^+$ 。从式 (21) 我们可以计算杨氏条纹的反衬度 C ：

$$\begin{aligned} C &\equiv \frac{\bar{I}_{\max} - \bar{I}_{\min}}{\bar{I}_{\max} + \bar{I}_{\min}} \\ &\sim |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)| \end{aligned} \quad (22)$$

由式 (22) 可见，式 (19) 场关联函数和干涉测量相关，特别是决定了干涉条纹的反衬度。

A. 相干时间, 相干长度, 相干面积, 相干体积

有了场关联函数式 (19), 我们可以方便的定义光场的相干长度和相干面积。例如, 我们考察稳定光场 (模式函数 \mathcal{E}_l 不含时), 同一坐标点不同时间的场关联函数,

$$g^{(1)}(\mathbf{r}, \Delta t) = \langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t)E^{(+)}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle_t \quad (23)$$

还可以定义均匀光场 ((模式函数 \mathcal{E}_l 接近于平面波) 在相同时间, 不同坐标的场关联函数:

$$g^{(1)}(\Delta \mathbf{r}, t) = \langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t)E^{(+)}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t) \rangle_{\mathbf{r}} \quad (24)$$

注意, 对于一大类以多模热态为代表的“非相干”光场分布来说, 我们有

$$\langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t)E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \sum_l \bar{n}_l \mathcal{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \mathcal{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \quad (25)$$

对于均匀和稳定的平面波模式来说:

$$n_k \mathcal{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \mathcal{E}(\mathbf{r}_2, t_2) = \bar{I}_k e^{i\omega_k \Delta t - i\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r}}$$

带入到上述式 (23,24), 令 $\tau = \Delta t$ 及 $x = \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_x$, 我们发现,

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\tau) &= \int d\omega_k I_k e^{i\omega_k \tau} \\ g^{(1)}(x) &= \int dk I_k e^{-ik_x x} \end{aligned} \quad (26)$$

因此, 对于均匀, 稳定, 随机多模光场来说, 场关联函数的时间和空间特性完全由模式光谱强度分布 $I(\omega_k)$, $I(k)$ 决定。而对于接近正态的光谱分布, 其谱线性质可以由宽度 $\Delta\omega_k = \sqrt{\langle \omega_k^2 \rangle - \langle \omega_k \rangle^2}$, $\Delta k = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}$ 决定。这些宽度决定了光场的相干时间, 纵向相干长度, 横向相干长度, 相干面积, 相干体积

$$\begin{aligned} \tau_c &= 1/\Delta\omega_k, \\ l_c &= c\tau_c \\ l_c^T &= \pi/\Delta k, \\ A_c^T &= \pi^2/\Delta k^2, \\ V_c &= A_c l_c \end{aligned} \quad (27)$$

可以想象, 类似图 (3a) 的干涉测量, 需要保证光程差 $|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_2|$ 小于 l_c , 且双缝之间的距离 $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ 小于 l_c^T , 才能有优质的干涉条纹在屏幕上出现。其基本原因, 是只有在这个距离以内的光子才是“全同,” 不可分辨”。

B. 等效单模光场

更加一般的来说, 多模光场激发在相干体积 V_c 内可以被等效为单模光场激发, 对之进行波前分割, 合束, 才可能出现稳定的干涉条纹。而体积内各点进行光强测量, 相应统计规律的小距离极限对应于第 (IC) 小节的单模统计。注意, 这儿等效单模光场的量子态计算需要小心: 处于多模混合态的热态和相干态在相干体积内还是多模热态和相干态, 其他量子态却不见得行。

C. 用杨氏条纹测恒星张角

图 (3a) 的光源可以考虑为远处的恒星。如下我们考虑对其激发的光场进行足够的频率（波长）滤波，形成的相干长度 l_c 很长，不需要在杨氏干涉中考虑光程差对干涉条纹反衬度的限制。我们着重考虑空间相干性。

考虑恒星的直径为 D , 距离地球为 L , 因此, 其张角为 $\delta\theta = D/L$. 由于恒星上不同地方发出的光是不相干的, 因此在我们考虑式 (25) 求和时, 对应恒星光谱空间频率分布宽度应该是 $\Delta k = \delta\theta k_0$, 其中 $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ 是星光（颜色过滤后）的波长. 由式 (27), 我们知道这样的光场, 其横向相干长度为

$$l_c^T = \frac{D\lambda}{L}$$

因此, 可以预期的是, 当我们改变双缝距离 $d = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ 时, 杨氏条纹的反衬度随着 d/l_c^T 下降, 当 $d = l_c^T = D\lambda/L$ 时, 反衬度应该下降近一半, 具体数值由式 (26) 决定. 这样我们就可以测出该恒星的张角 $\delta\theta$.

可以想象的是, 这样的测量在天文学中非常重要。

问题是这样的测量方法并不方便: 在地球上, 由于大气运动, 杨氏干涉的两臂（从恒星上的任意一点出发, 到地球上探测器的一点）会受到相位干扰, 干涉条纹不稳定, 需要高速和高效相机才能看到, 在上个世纪是无法实现的。

III. 多模光子关联: 热态和相干态

首先考虑多模相干态:

$$\rho = \prod_l |\alpha_l\rangle\langle\alpha_l|$$

由于相干态下正则排序算符直接变成复数, 我们显然仍有式 (13)

$$g^n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = 1$$

再考虑热态:

$$\rho_{\text{th}} = \frac{1}{Z} \prod_l e^{-\beta\hbar\omega_l a_l^\dagger a_l}$$

其中 Z 为配分函数, $\beta = 1/k_B T$.

对于光子数测量来说, 当然有:

$$\delta P^{(1)} = \eta \langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle_\beta = \eta \sum_l \bar{n} |\mathcal{E}_l(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (28)$$

n - 阶关联测量比较麻烦, 需要用到如下技巧:

$$\begin{aligned} \delta P^{(n)} &= \eta^n \underbrace{\langle E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \dots E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle}_n_\beta, \\ &= \eta^n \sum_{\text{perm}(j, n_j)} \prod_j \langle E^{(-)}(\mathbf{r}_j, t_j) E^{(+)}(\mathbf{r}_{n_j}, t_{n_j}) \rangle_\beta \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\text{perm}(j, n_j)$ 列举了所有 j, n_j 成对可能, 当然, 有 $n!$ 全排列种。

为何式 (29) 是对的? 可以从热态的 P-函数来理解。按照第三讲的理解, 我们用 P -函数对热态的密度矩阵用相干态对角展开:

$$\rho_{\text{th}} \propto \int \prod_l d^2\alpha_l e^{-|\alpha_l|^2/n_l} |\alpha_l\rangle\langle\alpha_l| \quad (30)$$

因此, 式 (29) 第一行可以转换为多元高斯积分。注意到高斯积分的特点, 是不同高斯型的指数求和可以分开为高斯乘积, 且每个高斯积分必须要有 α_l, α_l^* 成对出现, 因此, 容易证明, 式 (29) 第一行必然可以拆分成第二行的形式。

好了, 对于热态, 我们有:

$$g^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_n, t_n) = \frac{\delta P^{(n)}}{\prod \delta P^{(1)}} = \sum_{\text{perm}(j, n_j)} \prod_j^n |g^{(1)}(\mathbf{r}_j, t_j; \mathbf{r}_{n_j}, t_{n_j})|^2 \quad (31)$$

对于二阶光强关联函数:

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = 1 + |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)|^2 \quad (32)$$

特别是对于时间和空间上强度分布均匀的多模光场(如平面波模式)来说, $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = g^{(2)}(0, 0; \Delta\mathbf{r}, \Delta t)$, 因此可以表征为:

$$g^{(2)}(\Delta\mathbf{r}, \Delta t) = 1 + |g^{(1)}(\Delta\mathbf{r}, \Delta t)|^2 \quad (33)$$

此外, 注意式 (31) 也是式 (12) 的多模推广。对于恒定和均匀光场来说, 如果 \mathbf{r}_j, t_j 在相干体积和相干时间内, 且间隔“非常小”, 则对于我们的光强测量而言, 取样的电磁场模式等效的就是单模光场, $g^{(1)}(\Delta r \ll l_c, \Delta t \ll \tau_c) \approx 1$, $g^{(n)}$ 回归到式 (12)。

IV. HANBERRY BROWN-TWISS 干涉

式 (32) 蕴含了一个科学史上著名实验的物理。1956 年, 英国的实验天文学家 Hanberry-Brown 和 Twiss 在 Nature 上发表了一篇文章, 论述了一种新型的天体视角测量的原理。基本思路如图 (4)。

运用两个光电倍增管 D_a, D_b 记录星光, 并统计联合探测概率 $\delta P(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ 。移动探测器相对距离 \mathbf{r}_{ab} , 会发现

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \sim (1 + Cf(|\mathbf{r}_{ab}|/l_c^T))$$

其中关联系数 C 为正 (和测量光谱条件相关, 最佳值接近 1), $f(x)$ 随 x 单调递减到零, $f(1) \approx f(0)/2$ 。对于大犬座的天狼星来说, l_c^T 在地球上大概是 5 米左右。HB 和 T 推断说, 这个测量可以用来推测恒星的张角 $\delta\theta = D/L$, 其中 D 是恒星的直径, L 是恒星到地球的距离:

$$l_c^T \approx 1.2\lambda/\delta\theta$$

在当时, HB 和 T 是这么解释他们的思路的: 考虑恒星上距离 D 的 A, B 两点向地球发射电磁波, 振幅是 $\mathcal{E}_1 = \sqrt{I_1}e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, \mathcal{E}_2 = \sqrt{I_2}e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + i\phi}$, 那么地球上能看到两束平行光, 波矢 $\mathbf{k}_{1,2}$, 干涉条纹周期为 $2\pi/\Delta k = \lambda L/D$, 因为 A, B 两点实际上是星体上不同位置发出来的电磁波, 因此相对相位 $\phi(t)$ 是随时

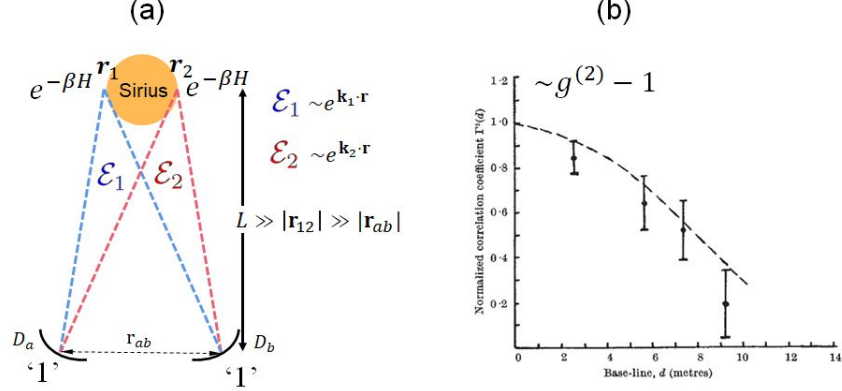


图 4. Schematic Hanbury-Brown-Twiss setup (a) for measuring angular width of star (b). The (b) plot is from HBT Nature paper.

间随机变化的，平均来说，这样的条纹是看不见的，但是如果探测器足够快，那么瞬态的干涉条纹能够通过考察 $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b$ 处的两个探测器的强度关联。具体来说，

$$\begin{aligned}
 (g^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b))_{\mathbf{r}_{1,2}} &= \frac{\langle |\sqrt{I_1}e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_a} + \sqrt{I_2}e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_a + i\phi}|^2 |\sqrt{I_1}e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_b} + \sqrt{I_2}e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_b + i\phi}|^2 \rangle_\phi}{\langle |\sqrt{I_1}e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_a} + \sqrt{I_2}e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_a + i\phi}|^2 \rangle_\phi \langle |\sqrt{I_1}e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_b} + \sqrt{I_2}e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_b + i\phi}|^2 \rangle_\phi} \\
 &= \frac{(I_1 + I_2)^2 + 2I_1I_2\cos(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ab})}{(I_1 + I_2)^2}
 \end{aligned} \quad (34)$$

其中 $\Delta\mathbf{k} = k_0 \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{L}$, $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ 。我们发现 $g^{(2)}(|\mathbf{r}_{ab}|)$ 有以 $1/\Delta k$ 为周期的振荡，并在 $\lambda/\delta\theta_{1,2}$ 的整数倍，包括零距离上，取最大。这儿 $\delta\theta_{1,2} = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{L}$ 是地球上看见 $\mathbf{r}_{1,2}$ 两点的张角。

当然，恒星上的光是所有区域发出的，所以上述分析应该对恒星上的所有 $\mathbf{r}_{1,2}$ 点求平均。我们简单考虑一下，

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &= \frac{\int d^2\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 (I(\mathbf{r}_1) + I(\mathbf{r}_2))^2 + 2I(\mathbf{r}_1)I(\mathbf{r}_2)\cos(k_0 \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{L} \cdot \mathbf{r}_{ab})}{\int d^2\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 (I(\mathbf{r}_1) + I(\mathbf{r}_2))^2}, \\
 &= 1 + \frac{1}{2}|F(k_0 D \mathbf{r}_{ab}/L)|^2
 \end{aligned} \quad (35)$$

注意上式第一行的积分，是正对恒星正对地球的表面的双重二维积分。第二行 $F(k_0 x)$ 经过合适的“归一化”是恒星表面光强函数 $I(X/D)$ 的傅里叶变换，其中 D 是恒星直径。

这样的解释合理吗？在 1950 年代，量子场论已经确立，所有物理学家都知道恒星辐射接近黑体辐射，并非经典电磁波能描述。而现在看来，上述 HB 和 T 的解释，感觉是将恒星发出的光描述成了相干电磁振荡，只是不同位置的激光相位不同而已。这样的描述，和当时物理学界对量子光场的普遍认识不一致。

当然，现在我们知道，式 (32) 包含了 HBT 效应星光测量的全部内容。然而式 (32) 将热态和相干态联系起来，也是 Roy Glauber 在数年后才做出的。注意式 (35) 结论和热光结论有一些差别：单色光理想状态下，热光结论是 $g^{(2)}(|\mathbf{r}_{ab}| \rightarrow 0) = 2$ ，而经典电磁波的上述推导给出 $g^{(2)}(|\mathbf{r}_{ab}| \rightarrow 0) = 3/2$ ，这个是因为，上述对经典光场我们仅考虑了相位涨落。

A. HBT 效应的量子光学解释

对 HB-T 实验, Roy Glauber 给出了量子场论解释, 这儿我们考虑最简化的图像: 仍考虑星体 $\mathbf{r}_{1,2}$ 两点, 激发了传向地球的 $\mathbf{k}_{1,2}$ 行波光场模式。注意到星体表面温度并不高: 例如 $T = 10^4\text{K}$, 在可见光波段仍然有平均光子数 $\bar{n} = 1/(e^{\beta\hbar\omega} - 1) \ll 1$ 。因此, 我们考虑的“非平凡”可能, 即 $\mathbf{k}_{1,2}$ 模式各有一个光子。

$$|\psi\rangle = b_1^\dagger b_2^\dagger |V\rangle$$

这个态下的单光子探测概率

$$\begin{aligned} (\delta P^{(1)}(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}_{1,2}} &= \eta \langle V | b_1 b_2 \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) b_1^\dagger b_2^\dagger | V \rangle \\ &= \eta \sum_f \langle f | [\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}), b_1^\dagger b_2^\dagger] | V \rangle^2 \end{aligned}$$

其中 $|f\rangle = |1, 0\rangle$ 或者 $|f\rangle = |0, 1\rangle$, 因此有:

$$(\delta P^{(1)}(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}_{1,2}} = \eta (|\mathcal{E}_1(\mathbf{r})|^2 + |\mathcal{E}_2(\mathbf{r})|^2) \quad (36)$$

注意, 上面推导中我们列举宇宙的模态 $|f\rangle$, 见图 (7)。此外, 注意到第一行是真空态的期待值, 所以想尽一切办法将算符变成正则排序, 因为正则排序在真空态下的期待值一定是零。

接下来, 我们看双光子探测联合概率:

$$\begin{aligned} (\delta P^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b))_{\mathbf{r}_{1,2}} &= \eta^2 \langle V | b_1 b_2 \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_a) \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_a) b_1^\dagger b_2^\dagger | V \rangle \\ &= \eta^2 |\Psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)|^2 \end{aligned} \quad (37)$$

其中有“双光子波函数”

$$\Psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \langle V | \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_a) b_1^\dagger b_2^\dagger | V \rangle. \quad (38)$$

这个从式 (37) 到式 (38) 的化简, 是由于双光子探测后唯一可能末态是真空, $|f\rangle = |V\rangle$ 。我们做正则排序, 得:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &= \langle V | [\mathbf{E}^+(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_a), b_1^\dagger b_2^\dagger] | V \rangle \\ &= \mathcal{E}_1(\mathbf{r}_a) \mathcal{E}_2(\mathbf{r}_b) + \mathcal{E}_2(\mathbf{r}_a) \mathcal{E}_1(\mathbf{r}_b). \end{aligned} \quad (39)$$

结合式 (36)(38)(39), 我们有:

$$(g^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b))_{\mathbf{r}_{1,2}} = \frac{|\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_a) \mathcal{E}_2(\mathbf{r}_b) + \mathcal{E}_2(\mathbf{r}_a) \mathcal{E}_1(\mathbf{r}_b)|^2}{(|\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_a)|^2 + |\mathcal{E}_2(\mathbf{r}_a)|^2)(|\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_b)|^2 + |\mathcal{E}_2(\mathbf{r}_b)|^2)} \quad (40)$$

我们对星星上面 $\mathbf{r}_{1,2}$ 两点发出的光近似为平面波, 有 $\mathbf{k}_{1,2} = \frac{\mathbf{r}_{1,2}}{L} k_0$, 因此, 如果星星上的光仅由 $\mathbf{r}_{1,2}$ 两点发出, 那么 (见图 (5)):

$$\begin{aligned} (g^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b))_{\mathbf{r}_{1,2}} &= \frac{1}{2} (1 + \cos(\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ab})), \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{L} k_0 \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)) \end{aligned} \quad (41)$$

从双模 HBT 效应, 到星体光的多模 HBT 效应, 需要考虑和式 (35) 一样, 的星体光源点 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 二重积分, 不再细推。

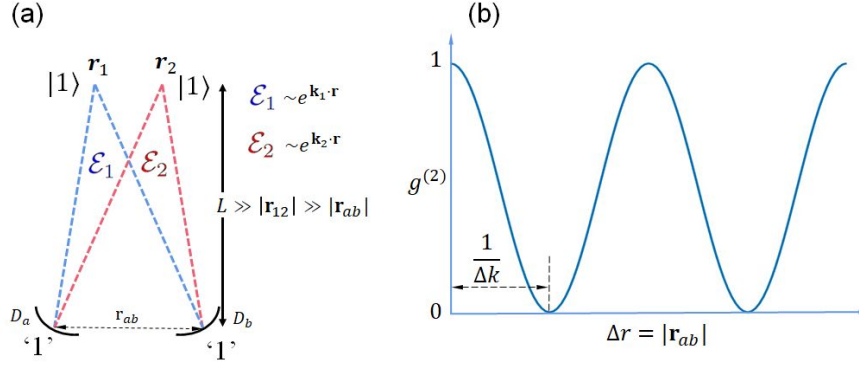


图 5. 2-photon 2-mode intensity correlation function according to Eq. (41) to explain HBT effect.

在做多光子推广之前，有一点需要强调，HBT 的 $g^{(2)} > 1$ 和光子产生湮灭玻色算符的互易关系密切相关。如果这个实验变成“中微子”实验，或者“中子”实验，那么可以证明，由于反互易关系

$$\begin{aligned}
 \{b_j, b_k\} &= 0, \\
 \{b_j^\dagger, b_k^\dagger\} &= 0, \\
 \{b_j, b_k^\dagger\} &= \delta_{j,k}
 \end{aligned} \tag{42}$$

其中 $\{A, B\} \equiv AB + BA$. 上述式 (39)(41) 等中的“+”需要更替为“-”。而相关结论的最优美实验证明，实际上是用冷原子给出 (图 (6)). 这种费米子的“反群聚”现象，HBT 的经典电磁波解释就完全对不上了。

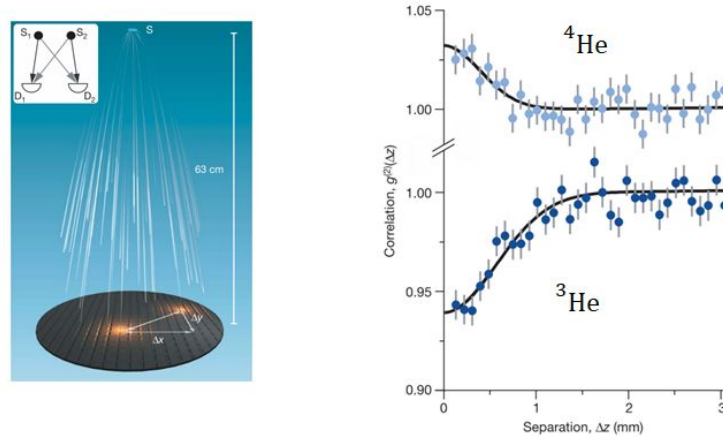


图 6. HBT effect for the bosonic ^4He and fermionic ^3He (From Nature 445, 402, 2007).

=====

Lecture 6

=====

V. 双模 FOCK 态的干涉

如果我们考察 $\mathcal{E}_{1,2}$ 两个模式，都是 $N \gg 1$ 光子态, $|\psi\rangle = |N, N\rangle$ ，注意，这个时候单光子探测概率

$$\begin{aligned} \delta P^{(1)}(\mathbf{r}) &= \eta \langle N, N | \mathbf{E}^-(\mathbf{r}) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}) | N, N \rangle \\ &= \sum_f \eta \langle N, N | \mathbf{E}^-(\mathbf{r}) | f \rangle \langle f | \mathbf{E}^+(\mathbf{r}) | N, N \rangle \end{aligned} \quad (43)$$

当然还是空间均匀的：

$$\delta P^{(1)}(\mathbf{r}) = \eta N (|\mathcal{E}_1(\mathbf{r})|^2 + |\mathcal{E}_2(\mathbf{r})|^2) \quad (44)$$

注意式 (43) 的推导中，我们列举了可能的宇宙末态 $|f\rangle$ 是 $|N-1, N\rangle$ 和 $|N, N-1\rangle$ ，可以方便的用图 (7) 形象化的表达。因为末态是正交的，因此两个过程的概率直接相加。

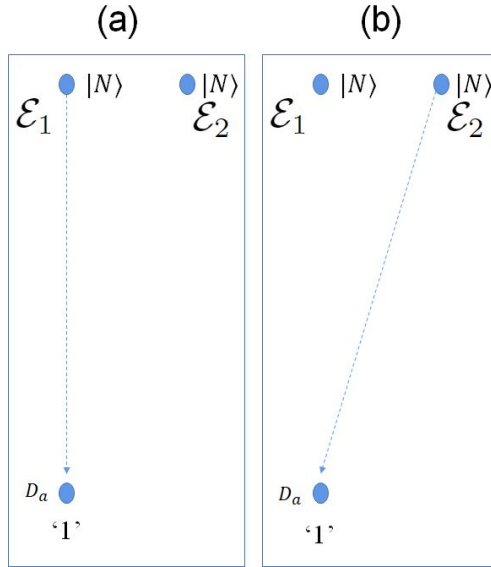


图 7. Two ways to have detector a to click "1".

我们当然知道，式 (44) 只是说，测量的期待值是空间均匀的，而“期待值”的获得，需要反复制备这样的实验，反复测量后取平均。然而对于每一次具体测量，光强的空间分布是什么，我们并不知道。

单次测量光强的空间分布是否均匀，在光子数 $N = 1$ 的时候，没有很大的讨论价值，但是在 $N = 10^8$ 就变得有具体意义，我们能看到条纹吗？为了回答这个问题，我们需要考察空间相关的光子数分布函数 $f(x, n)$ ，而不是平均值。这样的分布函数并不好计算，但很多相关信息可以从如式 (8) 的关联函数分析出来，我们还是考虑联合如图 (8) 的联合探测概率：

$$\begin{aligned} \delta P^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &= \eta^2 \langle N, N | \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_a) \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_a) | N, N \rangle \\ &= \sum_f \eta^2 \langle N, N | \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_a) \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_b) | f \rangle \langle f | \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_b) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_a) | N, N \rangle \end{aligned} \quad (45)$$

注意到上式的计算，从第一行到第二行我们插入了两个光子被联合探测到后，可能的宇宙末态 $|f\rangle$ 。最简单的方法，是考虑如图 (8) 的图形。其中 (a) 代表 $|f\rangle = |N-2, N\rangle$, (b) 代表 $|f\rangle = |N, N-2\rangle$, (c,d) 同时代表 $|f\rangle = |N-1, N-1\rangle$ 。很显然，对于 (a,b) 我们概率相加，对于 (c,d) 我们必须概率幅相加，因此有

$$\delta P^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \eta^2 (N(N-1)(|\mathcal{E}_1(r_a)\mathcal{E}_1(r_b)|^2 + |\mathcal{E}_2(r_a)\mathcal{E}_2(r_b)|^2) + N^2|\Psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)|^2)$$

从而有

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \frac{N-1}{N} + \frac{|\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_a)\mathcal{E}_2(\mathbf{r}_b) + \mathcal{E}_2(\mathbf{r}_a)\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_b)|^2 - \frac{N-1}{N}(|\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_a)\mathcal{E}_2(\mathbf{r}_b)|^2 + |\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_b)\mathcal{E}_2(\mathbf{r}_a)|^2)}{(|\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_a)|^2 + |\mathcal{E}_2(\mathbf{r}_a)|^2)(|\mathcal{E}_1(\mathbf{r}_b)|^2 + |\mathcal{E}_2(\mathbf{r}_b)|^2)} \quad (46)$$

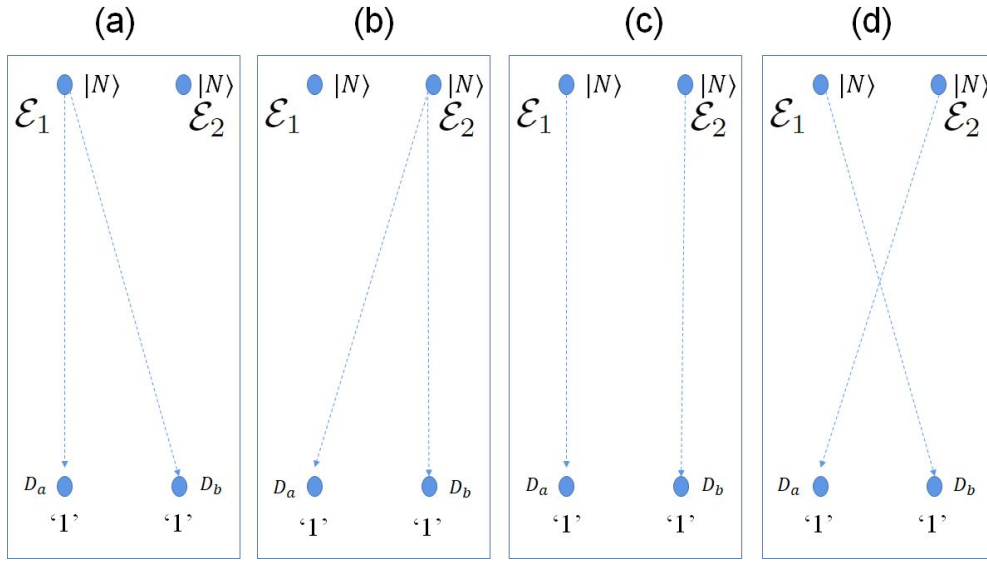


图 8. Four ways to have both detector a, b to have a click "1".

我们还是考虑 $\mathcal{E}_{1,2} \propto e^{i\mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r}}$ 为平面波模式。同时考虑大 N 极限，那么自然有

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)|_{N \rightarrow \infty} = 1 + \frac{1}{2} \cos(\Delta k \cdot \Delta \mathbf{r}) \quad (47)$$

好了，式 (47) 的意思是，两个探测器同时探测到光子的概率有关联，距离 $\Delta r = (2n+1)\pi/\Delta k$ 的两个探测器，同时测得光子的概率，会比距离为 $\Delta r = (2n+1)\pi/\Delta k$ 的两个探测器的概率小三倍！

那么，如果我们在地面上铺满探测器，则应该可以看到以 $2\pi/\Delta k$ 为周期的条纹。反衬度是 $C = \frac{3/2-1/2}{3/2+1/2} = 0.5$ 。而如果我们不断重复这样的测量，会发现条纹的位置每次不同，平均下来，每个探测器看到的平均光强还是均匀的 (式 (44))。

VI. 光子计数的时间关联

A. 双模 Fock 态干涉的含时分析

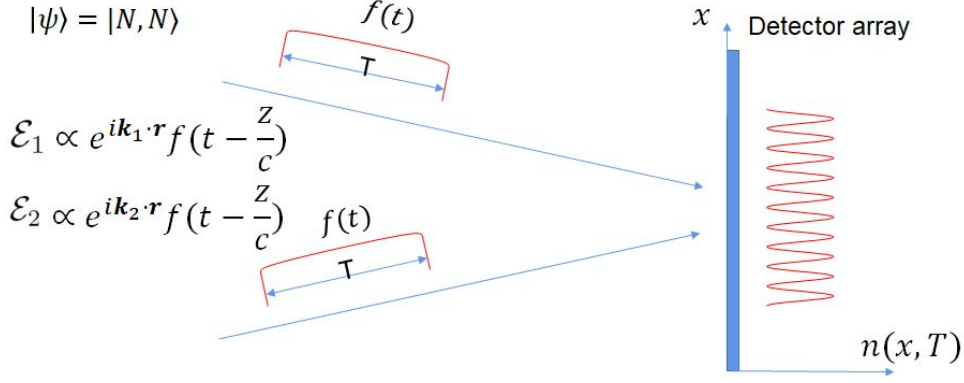


图 9. Time-resolved measurement of intensity distribution for a two-mode Fock state.

当我们引入 $\mathcal{E}_{1,2}$ 模式的含时性后, 上述式 (47) 就变得非常非常反直觉了。考虑如图 (9) 所示, 平面波模式 $\mathcal{E}_{1,2}$ 均是时长为 T 的波包, 含时包络函数为 $f(t)$ 。入射光子态是 $|\psi\rangle = |N, N\rangle$ 且 $N \gg 1$ 。我们考察运用探测器阵列 D_j 对双模 Fock 态进行“单次”测量。为讨论方便, 我们考虑沿着 $\Delta\mathbf{k}$ 方向的一维阵列, 每个探测器宽度为 δx , 总共有 M 个探测器覆盖光场的截面, 并记每个探测器的光子计数为 n_j 。由上述论证可知, 单次测量下, 在脉冲光完全被记录下来后, $n_j(T)$ 的分布应该遵从

$$n_j(T) \approx \frac{2N}{M} \left(1 + \frac{1}{2} \cos(j\Delta k \delta x + \varphi_R) \right) \quad (48)$$

当然, 再次说明, 如果我们反复做这个实验, 随机相位 φ_R 的取值是完全随机的, 因此会有

$$\overline{n_j(T)} = \frac{2N}{M}$$

然而在每一次测量的时候, 确实有如式 (48) 的光子数分布干涉条纹。那么我们很好奇, $n(x, t), 0 < t < T$ 是怎么演化的?

为了论述方便, 我们考虑光的模式函数时间包络 $f(t)$ 非常长, 比如说, 有 1 秒长, 而光子数也非常多, 比如说有 $N = 10^8$ 个。可以想象, 起初 0.9 秒, 共有 9×10^7 个光子已经被探测到, 如式 (47) 的干涉条纹已经形成, 随机相位 φ_R 在这次实验已经被确立起来。那么, 还有 0.1 秒的时间供剩下的 10^7 个光子“选择”进入哪个探测器 D_j 。

我们发现, 剩下的 10^7 个光子被探测到的概率, 是由已经几乎被确立起来的 φ_R 决定的, 遵从式 (47) 条纹相应的概率! 换句话说, 似乎这最后一千万个光子能“感知”到前九千万个光子是怎么被探测到的!

这个奇特的量子现象, 和著名的 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 实验有相同的物理本源: 被单光子波函数 $\mathcal{E}_{1,2}$ 定义的多量子光子态, 在测量过程中常常会显示出非局域的量子关联。而这种非局域关联在测量过程中的主动应用, 可驱动“量子通讯”, “量子隐形传递”等一类面向未来的量子技术。

B. 单模多频光场的光子计数

以上我们仅考虑了单频光场 (或者单个时间函数形式 $f(t)$ 光场) 的空间强度关联。接下来我们引入时间自由度。多频量子光场的时域分析是精密测量等物理理论的基础, 极端重要。在数学框架上, 标

准做法是直接写出同一空间模式不同频率光场的升降算符 $a_\omega, a_\omega^\dagger$ 并规定

$$[a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = \delta_{\omega, \omega'}$$

这儿我们首先需要注意的是，原则上来说，由于 $\omega = c|\mathbf{k}|$ 由真空色散关系决定，那么如果 $\omega \neq \omega'$ ，则光场的空间模式不可能完全一样。然而实际情况是由于光速巨大，微小的频率变化 $\delta\omega$ 几乎不改变光场的波数 k ，从而由“单模多频光场”的概念。

本小节中，为了物理直观图像的建立，我们并不从频域分析多模光场，而是从时域上分析。考虑如图 (10) 的同一个“空间模式” $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ ，不同的频率光场模式。既然频率范围为 $\delta\omega$ ，那么我们也可以将多频光场用时域模式来表达：

$$\mathcal{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r})f_j(t - z/c)$$

对应光场算符为 b_j, b_j^\dagger 。这儿我们假设光场沿着 z 方向传播，其中包络函数 $f_j(t) = f(t - j\tau_c)$ 的中心在 $j\tau_c$ ， $\tau_c = 1/\delta\omega$ 是多频光场的相干时间。由归一化条件，在 $0 < t < \tau_j$ ，我们规定 $f_j(t) = 1/\sqrt{\tau_c}$ ，而其他处取零。

由式 (4)，我们可以考虑在 $[t, t + \delta t]$ 时段内，在探测器位置 $z = 0$ 处的单光子计数率

$$\begin{aligned} \delta n(t) &= i(t)A\delta t \\ &= \sum_j b_j^\dagger b_j |f_j(t)|^2 \delta t \end{aligned} \quad (49)$$

这儿 b_j, b_j^\dagger 是 $\mathcal{E}_j(\mathbf{r}, t)$ 对应的光场算符。 A 是探测器的面积，我们假设 A 大于单模光场的截面，且探测器的量子效率 $Q = 1$ 。因此，光场内所有光子最终都会被探测到。如果光强较小， $\langle \delta n \rangle \ll 1$ ，那么探测器的输出会是如图 (10d) 的一个一个电脉冲。我们可以对测量到的 $\langle \delta n(t)/\delta t \rangle$ 做低通滤波，即可得到含时的光电流 (10c)。

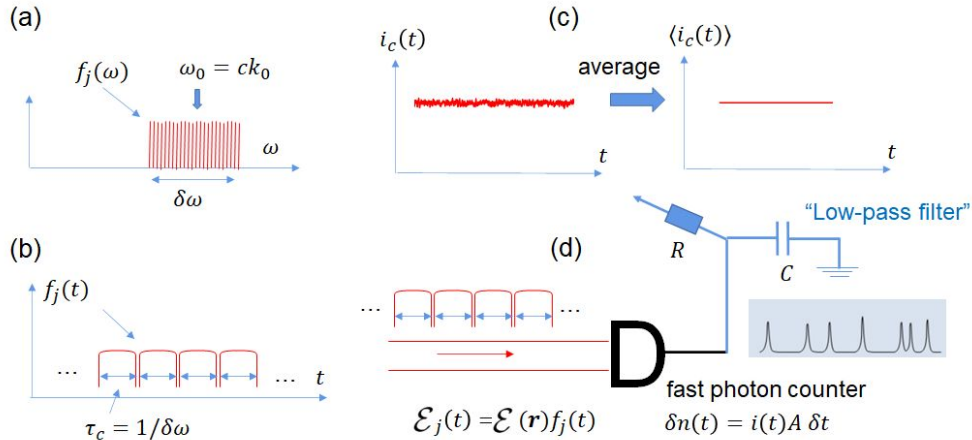


图 10. Representation of multi-frequency optical modes in frequency (a) and time (b) domain. The fast photon counting in (c) can be time-averaged to obtain the photon current $\langle i(t) \rangle$ in (d).

和上述诸小节对空间分布探测器的 $g^{(2)}(\Delta r)$ 关联分析一样，我们可以开始考虑同一个探测器在不同时刻探测的关联函数 $g^{(2)}(\Delta t)$ 。

我们首先考虑光场模式 \mathcal{E}_j 均处于热态, $\rho = \prod \rho^j$, 而和第 (IC2) 小节一样, $(\rho^j)_{mn} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega_1})e^{-n\beta\hbar\omega_1} \delta_{mn}$, 而光子计数率为:

$$\langle \delta n(t) \rangle = \frac{\bar{n}}{\tau_c} \delta t \quad (50)$$

其中 $\bar{n} = 1/(e^{\beta\hbar\omega} - 1) = \langle b_j^\dagger b_j \rangle$ 是每个 j 模式的平均光子数。

我们可以试图写出联合测量概率:

$$\langle \hat{N}[\delta n(t)\delta n(t + \Delta t)] \rangle = \text{tr}(\rho \hat{N}[\delta n(t)\delta n(t + \Delta t)])$$

注意, 从光子联合测量概率 (式 (6) 到光子关联计数, 我们不要忘记了正则排序这个问题, 因此上式我们用到了算符的正则排序 $\hat{N}[\dots]$ 。

我们不做具体推导, 而是直接考虑两个极端:

1) $\Delta t \ll \tau_c$, 这个情况下, 光子的联合探测实际上是由所有”脉冲“单模光场 \mathcal{E}_j 贡献, 因此, 由式 (11), 我们有:

$$\langle \hat{N}[\delta n(t)\delta n(t + \Delta t)] \rangle_{\Delta t \ll \tau_c} = 2 \left(\frac{\bar{n}}{\tau_c} \delta t \right)^2 \quad (51)$$

2) $\Delta t \gg \tau_c$, 这个时候光子的联合探测完全由互相独立的 $\mathcal{E}_{j,k}$ 贡献, 没有关联, 因此有:

$$\langle \hat{N}[\delta n(t)\delta n(t + \Delta t)] \rangle_{\Delta t \gg \tau_c} = \left(\frac{\bar{n}}{\tau_c} \delta t \right)^2 \quad (52)$$

事实上, 可以证明, 对于热光来说, 光子探测的二阶关联

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\Delta t) &\equiv \frac{\langle \hat{N}[\delta n(t)\delta n(t+\Delta t)] \rangle}{\langle \delta n(t) \rangle \langle \delta n(t+\Delta t) \rangle} \\ &= 1 + |g^{(1)}(\Delta t)|^2 \end{aligned} \quad (53)$$

其中

$$g^{(1)}(\Delta t) = \frac{\langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t + \Delta t) \rangle_t}{\langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t) \rangle_t}$$

是光场的”一阶场关联函数“, 在我们这儿的简化处理中, 即由 $g^{(1)}(\Delta t) = \langle f(t)f(t + \Delta t) \rangle_t$. 这个结果和我们的假设: 多频热光可以视为长度为 τ_c 的脉冲光是一致的。

注意到时域模式函数 $f_j(t)$ 下的热态, 和频域模式函数 $f_j(\omega)$ 下的热态, 并不等价, 如果我们从 $f_j(\omega)$ 模式出发, 细致的计算可以证明, $g^{(1)}(\Delta t)$ 多频光场谱函数的反傅里叶变换。例如, 对于”带通“滤色片 $\delta\omega$, $g^{(1)}(\Delta t) = \text{sinc}(\delta\omega\Delta t)$, 因此对大的时间延迟有 $|g^{(1)}(\Delta t)|^2 \sim 1/|\delta\omega\Delta t|^2$. 在长延时下趋于 0, 和我们的分析结论一致。

接下来我们考虑相干态: $|\psi\rangle = |\{\alpha_j\}\rangle$, 很明显, 我们有

$$g^{(2)}(\Delta t)|_{\alpha} \equiv 1 \quad (54)$$

C. 总结 – 光子群聚及反群聚

以上式 (53) 被称为光子群聚，顾名思义。事实上，HBT 是光子群聚的空间表现，式 (53) 是光子群聚的时间表现。对于热光来说，我们可以总结为：

$$g^{(2)}(|\Delta r| < l_c, \Delta t < \tau_c) > 1$$

另一方面，对于多模光场来说，即使是从直觉上，我们也知道

$$g^{(2)}(|\Delta r| \gg l_c, \Delta t \gg \tau_c) = 1$$

即热态的光子在横向相干面积，纵向相干时间以内被联合检测到的概率大于独立检测概率积。这个属性，和光子是玻色子，满足全同交换对称性相关。

相同的设置，对于如中微子，中子，或者任何自旋为半奇数的原子，则是联合探测概率小于独立探测概率积。

另一方面，

1) 很容易证明，空间单模的多频相干态的多光子检测，在时间和空间上都是完全独立的。 $g^{(2)} \equiv 1$

2) 空间多模，时间多频相干态，会有 $g^{(2)}(\Delta r < l_c, \Delta t < \tau_c) > 1$ 的现象，这对应于 HBT 对 HBT 实验的经典解释。

最后，光子作为玻色子，是否可以”反群聚“，即

$$g^{(2)}(|\Delta r| \gg l_c, \Delta t \gg \tau_c) < 1?$$

我们仍考察图 (10) 的时域模式图像，如果光场量子态是

$$|\psi\rangle = \prod b_l^\dagger |V\rangle$$

即每个波包里面只有一个光子，即可。单光子波包的反群聚，在 1980 年代由 Alan Aspect 实验给出，见 Lecture 1。

注意，此时的时域单光子态必须是精确构造的，而不能是通过多频单光子态频率滤波实现。

我们将空间单模，时域多模光子态的热光群聚，相干态无关联，及单光子态反群聚总结表达在图 (11)。

VII. 相干态光场的光子计数 – 泊松过程

回到”单频“光并考虑相干态。我们考察图 (12)(b) 所示的一个“长脉冲”模式 $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r})f(t - z/c)$ 被 $z = 0$ 处的高速单光子计数器探测。光子态为相干态 $|\alpha\rangle$ ，我们可以从光子能量的时间分布，推测出脉冲光的瞬时功率：

$$\mathcal{P}(t) = \hbar\omega_0 |\alpha|^2 |f(t)|^2. \quad (55)$$

我们考察在 $[t, t + \Delta t] \in [0, T]$ 时间段对单模光场沿着模式截面 A 光子计数，总光子数可以写为

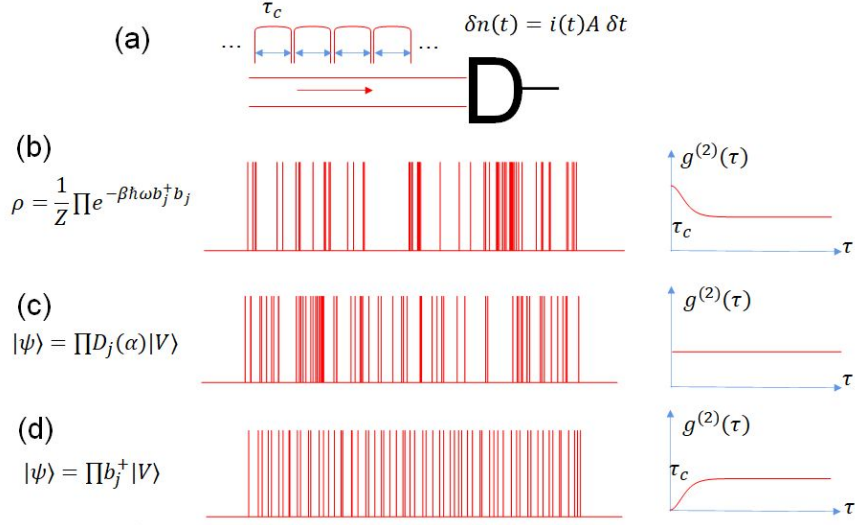


图 11. 光子态（反）群聚总结。(a) 是空间单模，时域多模光场的单光子探测示意图。本课程中，我们将时域多模简化为时长为 τ_c 的脉冲模式。响应时间 $\delta t \ll \tau_c$ 的探测器 D 特征输出见 (b-d)。对于 (b,c) 来说，我们的时域波包模式函数选择和频域波包结果类似（例如太阳光可以视为时域波包，也可以视为频域波包）。而对于 (d) 的单光子态来说，时域波包必须是严格定义的波包形式，且每个波包只能有一个光子。

$$\begin{aligned}
 \bar{n}([t, t + \Delta t]) &= \int_t^{t+\Delta t} A \frac{\delta P^{(1)}(\tau)}{\delta t \delta A} d\tau \\
 &= \int_t^{t+\Delta t} \langle \alpha | b^\dagger b | \alpha \rangle |f(t)|^2 \\
 &= |\alpha|^2 \frac{\Delta t}{T}
 \end{aligned} \tag{56}$$

这个很容易理解，模式里面的平均光子数是 $|\alpha|^2$ ，那么探测 Δt 时间，得到的比例有 $\Delta t/T$ 这么多的光子。

由于相干态 $g^{(n)} = 1$ ，我们运用式 (16)，有在 $[t, t + \Delta t]$ 时间间隔内测得 n 光子的概率（光子数分布）为

$$f(n) = e^{-\Gamma \Delta t} \frac{(\Gamma \Delta t)^n}{n!}, \tag{57}$$

其中 $\Gamma = \delta P(1)/\delta t = |\alpha|^2/T$ 是相干态脉冲光场下的平均计数率。

VIII. 光子散粒噪声

A. 散粒噪声的基本特点

我们回到图 (12)。现在我们知道，在 Δt 事件内，光子计数平均值由式 (56) 决定，而分布函数则由式 (57) 给出。在此时间段内，具体探测器何时“click”也是随机的。我们考虑探测器的响应时间 δt 远小于我们关心的其他物理过程时间尺度。且设探测器面积为“单位面积 $A = 1$ ”。对于单次测量，我们可以写出光电流 $i(t) = \delta n/\delta t$

$$i(t) = \sum_j \delta(t - t_j)$$

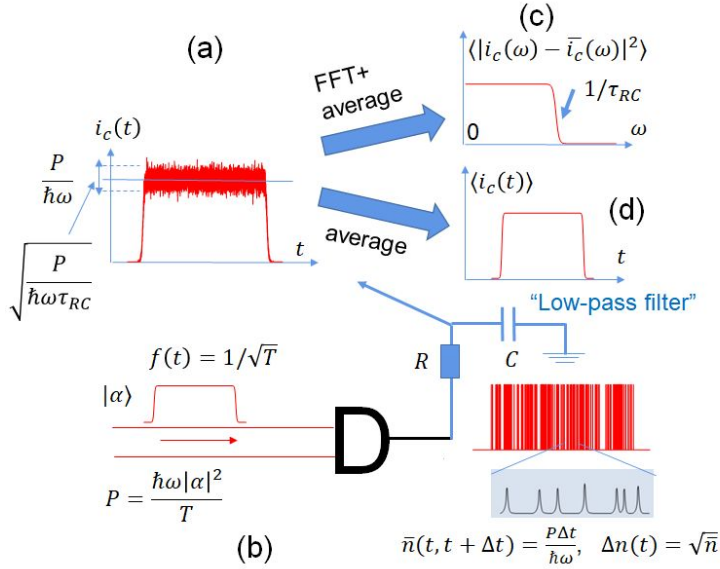


图 12. 相干态的光子计数。我们考虑一个时长为 T 的单模脉冲光。图 (b) 的单光子计数器输出，经过低通滤波（截止频率为 $\omega_c = 2\pi/RC$ ，响应平均时间为 $\tau_{RC} = 1/\omega_c$ ）后形成光电流 i_c 输出 (a)。输出电流的平均值是 $\langle i_c \rangle = P/\hbar\omega_0$ ，计数涨落 $\Delta n = \sqrt{\langle i_c \rangle \times \tau_{RC}}$ 及电流涨落 $\Delta i = \sqrt{\langle i_c \rangle / \tau_{RC}}$ 由随机泊松过程决定。相应噪声谱 $\sqrt{\langle |i_c(\omega)|^2 \rangle} = \sqrt{PT/\hbar\omega_0}$ 在 ω_c 处截止。

即光电子在 $t = t_j, j = 1, \dots$ 的随机时刻发生。从而有 $n(t, t + \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} i(\tau) d\tau$ 。平均来说，我们才有

$$\bar{i}(t) = \frac{\mathcal{P}(t)}{\hbar\omega_0}$$

现实生活中的探测器的响应不可能是无穷快的，我们可以用一个 RC 电路来模拟缓慢的响应，经过低通滤波的光电流可以写为：

$$i_c(t) = \sum_j \theta(t - t_j) \frac{1}{\tau_{RC}} e^{-\frac{t-t_j}{\tau_{RC}}}$$

其中 $\theta(t)$ 是单位步进函数，在 $t > 0$ 时取 1。这样的信号，虽然平均来说也有 $\bar{i}_c(t) = \mathcal{P}(t)/\hbar\omega_0$ ，但每次测量具体形式都不可预测，也即存在噪声。我们考察 $\bar{i}\tau_{RC} \gg 1$ ，即信号基本上相连 (图 (12a))，那么光电流的涨落幅度大小可以计算出是：

$$\Delta i_c = \sqrt{\frac{\mathcal{P}(t)}{\hbar\omega_0 \tau_{RC}}} \quad (58)$$

这样的光电流噪声，我们可以认为是“激光功率不稳”导致的，对应的激光功率涨落

$$\Delta \mathcal{P} = \sqrt{\mathcal{P}(t) \frac{\hbar\omega_0}{\tau_{RC}}} \quad (59)$$

此光功率散粒噪声表达式可以推广到电流散粒噪声等等其它微观运输机制的粒子性导致的强度涨落。

$$\Delta O = \sqrt{\langle O \rangle O_1} \quad (60)$$

其中 $\langle O \rangle$ 是观测量 O 的平均值，而 O_1 是单个量子驱动的 O 值。

为了进一步刻画这样的噪声的时域特性，我们可以在 $[0, T]$ 对过滤的光电流进行频谱分析：

$$i_c(\omega) = \sum_j \frac{e^{i\omega t_j}}{1 + i\omega\tau_{RC}}$$

从而有

$$\Delta i(\omega)^2 \equiv \langle |i_c(\omega)|^2 \rangle - |\langle i_c(\omega) \rangle|^2 = \left\langle \sum_j \frac{1}{1 + \omega^2\tau_{RC}^2} \right\rangle$$

或者说，

$$\Delta i(\omega)^2 = \frac{\mathcal{P}T}{\hbar\omega_0} F(\omega) \quad (61)$$

其中 $F(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2\tau_{RC}^2}$ 是低通滤波函数。对于高级的探测器来说，滤波函数常常不是洛伦兹型，而是频谱上均匀的低频响应，直到一个截止频 ω_c ，如图 (12c) 所示。

式 (61) 是光散粒噪声谱的一般表达式，其重要特征是噪声谱是“平”的，其强度由 $\mathcal{P}T/\hbar\omega_0$ 即平均光子数给出，只是测量期间的响应函数 $F(\omega)$ 会改变其形状。

B. 吸收测量的散粒噪声极限

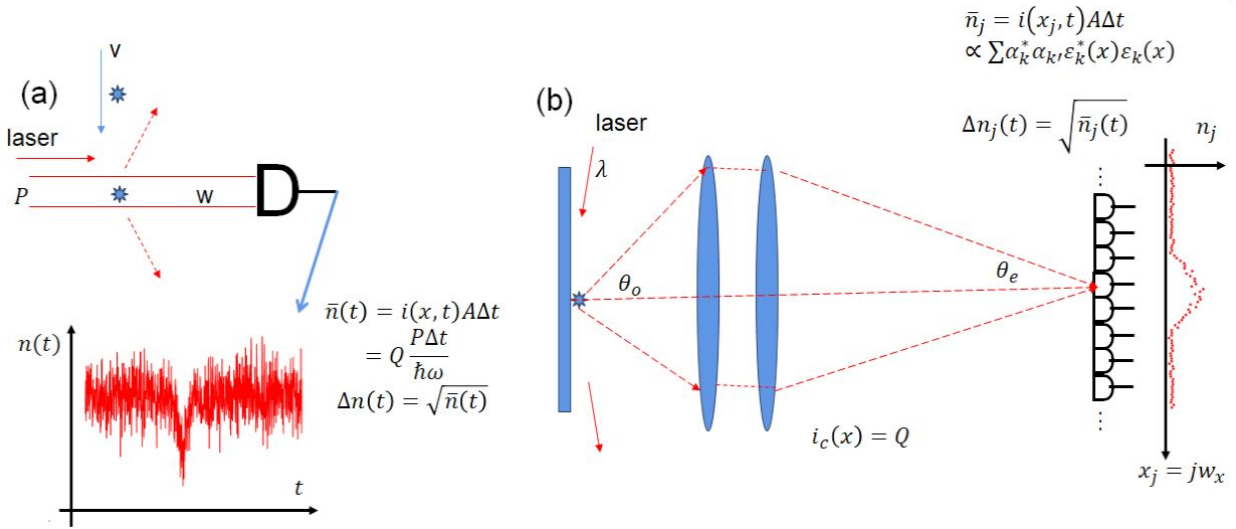


图 13. (a) Photon shot-noise-limited transient transmission measurement. (b) Diffraction and photon-shot-noise-limited imaging.

如图 (13a)，我们考察用单模激光检测光路中的散射粒子。激光功率为 \mathcal{P} ， Δt 内单模探测器的预期检测光子数

$$\begin{aligned} \bar{n}(t) &= \frac{QcA\Delta t}{\hbar\omega} \langle E^{(-)}(x, t)E^{(+)}(x, t) \rangle \\ &= Q \frac{\mathcal{P}(t)\Delta t}{\hbar\omega} \end{aligned} \quad (62)$$

其中 Q 为探测器量子效率。

如果光路中存在散射粒子，其散射能力 ηP 可以由透射率

$$T = \bar{n}'/\bar{n} \quad (63)$$

来估计。我们的预期当然是 $T = 1 - \eta$ ，然而如果 η 太小，能测出来吗？

注意到光子计数的散粒噪声涨落给出透射率变化测量的灵敏度下限：

$$\begin{aligned} \delta T &= \Delta n/\bar{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}, \\ &= \frac{\hbar\omega}{\sqrt{QP\Delta t}} \end{aligned} \quad (64)$$

是否可以提高呢？单光子脉冲串 (Fig. 11c)。

$$\delta T_{\text{Heisenberg}} = 1/n$$

C. 衍射极限成像和超分辨

如图 (13b), 我们考察一维照相机像素整列 D_j , 每个像素的面积为 A , 沿着 x 方向的宽度为 w_x 。左侧平板上由灰尘, 经过 λ 光场照射, 由成像系统激发照相机前的真空场, 形成成像光场。

我们考察探测器 D_j 的光子读数,

$$\begin{aligned} \bar{n}_j &= \frac{QcA\Delta t}{\hbar\omega} \langle E^{(-)}(x)E^{(+)}(x) \rangle \\ &\propto \sum_{k,k'} \alpha_k^* \alpha_k \mathcal{E}_k^*(x) \mathcal{E}_{k'}(x) \end{aligned} \quad (65)$$

分辨率极限

$$\begin{aligned} \Delta x_D &= \pi/\Delta k, \\ \Delta x_D &= \lambda/2NA \end{aligned} \quad (66)$$

$$NA = \sin(\theta_o)$$

是否可以 fit 成像中心？

$$\delta x \sim \frac{\Delta x_D}{\sqrt{\sum \bar{n}_j}} \quad (67)$$

$\bar{n} \gg 1$, 可以实现样品位置中心定位的超分辨。

是否可以提高呢？量子成像 (后续介绍)

多光子测量:

第二次作业第二部分

- (1) 请结合上下文, 详细推导式 (10), 式 (37), 及式 (40)。
- (2) 请结合式 (27), 估算地球表面太阳光的相干面积, 相干长度, 相干体积。
- (3) 请详细推导式 (34)。

(4) 中微子很难探测, 然而高能中微子有很小的散射截面可以将质子转换中子和正电子, 而正电子和电子的湮灭可以被光电探测, 从而被检测到。原则上来说, 中微子也可以做 HBT 效应。现考虑远距离测量某核电站发电过程中的中微子流。请设计中微子强度关联测量实验装置, 并以式 (42) 为基础, 做出和式 (40), 式 (32) 类似的推导, 解释中微子联合探测概率的空间关联特性。

第二次作业第三部分

- (1) 请根据图 (8), 详细推导式 (46)。

(2) 考察图 (13a)。有散射粒子从上方以速度 v 穿越腰宽为 w 的高斯激光束, 从探测光子计数 $n(t) = i(t)A\Delta t$ 来看, 透射率 $T(t) = n(t)/\bar{n}$ 存在瞬态的下降。现考虑波长为 $\lambda = 1 \mu\text{m}$ 的激光功率 $\mathcal{P} = 1 \mu\text{W}$, 腰宽 $w = 1 \text{ mm}$, 散射粒子的直径 d 远小于 w 。粒子速度 $v = 1\text{km/s}$, 因此, 粒子的渡越时间在 $\tau_c \approx 1 \mu\text{s}$ 。粒子“完全不透明”, 因此散射能力由 $\delta\mathcal{P} = \sigma I(x(t), 0)$ 给出 (因此, 透射率 $\bar{T} = 1 - \delta\mathcal{P}/\mathcal{P}$), 这里 σ 是粒子的横截面面积, 而激光光强是

$$I(x, y) = \frac{2\pi\mathcal{P}}{w^2} e^{-2(x^2+y^2)/w^2}$$

假设探测器的量子效率为 $Q = 1$, 探测带宽 $\Delta f \gg 1/\tau_c$, 足够解析粒子渡越过程, 请讨论该透射测量装置检测散射粒子直径的精度。此外, 设粒子运动轨迹 $x(t) = v \times (t - t_0)$ 。如果我们试图估计粒子处于光束中心的时间 t_0 , 估计精度 δt_0 能在什么量级?