rev:2023/09/12

电磁场的量子化

吴赛骏*
复旦大学物理系，上海 *200433,* 中国。

本文档随教学进程跟新。

I. MAXWELL 方程的正则量子化

上一节课，我们讨论了牛顿力学的“正则量子化”，其关键在于找到体系的“正则坐标”和“正则动量”。这一方法可以沿用来对“经典场”进行量子化。第一步，是找到“场”的“正则坐标”和“正则动量”。

我们考察真空中的 Maxwell 方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t B$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t E$$

其中 $c = 299792458$ 米/秒是真空光速。

我们希望找到电磁场的哈密顿量，将之表达成正则坐标和正则动量的函数，并且将这四个方程写成哈密顿方程的形式。

在做这件事之前，让我们首先回顾耦合谐振子的经典力学正则表达和量子化。我们会发现，耦合谐振子和场的描述，在数学结构上是一一对应的。

A. 耦合谐振子

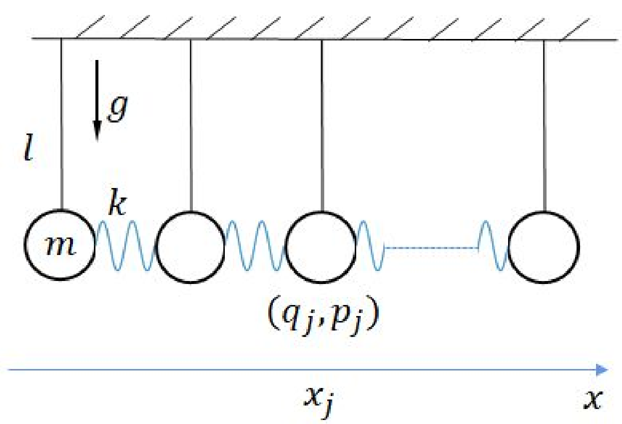

图 1. Coupled harmonic oscillators. To map the parameters to Eq. (1), we have $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ and $\omega_c = \sqrt{k/m}$.

如图 (1) 的耦合谐振子阵列，拉格朗日量的写法：

$$L = \frac{m}{2}\sum\left(\dot{q}_j^2 - (\omega_0^2 q_j^2 + \frac{1}{2}\omega_c^2(q_{j,j-1}^2 + q_{j+1,j}^2))\right)$$

---

* saijunwu@fudan.edu.cn

引入动量 $p_j = m\dot{q}_j$, 哈密顿量的写法：

$$H = \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} m(\omega_0^2 q_j^2 + \frac{1}{2}\omega^2 (q_{j,j-1}^2 + q_{j+1,j}^2)) \right) \tag{1}$$

可以直接量子化：

$$[q_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

注意，这儿 δ_{jk} 仅当 $j = k$ 时为一，是上节课正则量子化中我们没提到的：对于不同的自由度，其正则坐标，正则动量都是互易的。

然而这么干，有一点不方便：不同谐振子是耦合起来的，接下来解海森堡方程，会发现 q_j,p_k 随着时间演化，变得复杂，

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= p_j/m \\ \dot{p}_j &= -m(\omega_0^2 q_j + \omega_c^2(2q_j - q_{j-1} - q_{j+1})/2) \end{aligned} \tag{2}$$

当然，这样的复杂，最终是难免的。然而在“自由场量子化“这一步，我们还是想尽量避免。方法也很简单，我们可以做坐标变换，写出简振模式的坐标和动量：

$$Q_j = \sum_k \eta_{jk} q_k$$

$$P_j = \sum_k \eta_{jk} p_k$$

使得

$$H = \sum_j \left(\frac{P_j^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_j^2 Q_j^2 \right)$$

ω_j 为简振模式 j 的频率。这样的坐标变换，也叫”正则变换”, 变换矩阵 η 是正交矩阵: $(\eta^{-1})_{jk} = \eta_{kj}$。接下来就好办了，引入互易关系

$$[Q_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

等等，不再继续。接下来，为了更加明显的将上述式 (2) 的对角化过程和波动方程本征模式解联系，我们考虑机械波的量子化。

B. 机械波的量子化

仍然从图 (1) 出发，我们考虑沿着 x 方向定义机械波场 $q(x)$, 第 j 个振子的振幅可以取样为 $q_j = q(x_j)$。式 (2) 中的最后一项可以近似写为:

$$\omega_c^2(2q_j - q_{j-1} - q_{j+1})/2 \approx -\omega_c^2 \Delta x^2 \partial_x^2 q(x_j)$$

接下来我们认为，相对于我们关心的 q_j, p_j 振动模式随其位置 x_j 的空间变化，Δx 足够小，因此 $(q(x_j), p(x_j))$ 足以描述 (q_j, p_j)。令 $v_c = \omega_c \Delta x$ 不变, 从式 (2) 我们发现:

$$(\partial_t^2 - v_c^2 \partial_x^2) q(x,t) = -\omega_0^2 q(x,t). \tag{3}$$

相应的，式 (1) 变为:

$$H=\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{\Delta x}(\frac{1}{2m}p(x,t)^2+\frac{m}{2}(\omega_0^2q(x,t)^2+v_c^2(\partial_xq(x,t))^2)). \tag{4}$$

其中 L 是耦合振子串的总长度，$L=N\Delta x$。

式 (3) 机械波有通解：

$$q(x,t)=\sum_k f_k(x)\alpha_k e^{-i\omega_k t}+c.c., \tag{5}$$

其中本征模式函数

$$f_k(x,t)=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{ikx}$$

有色散关系

$$\omega_k^2=\omega_0^2+k^2v_c^2. \tag{6}$$

注意，模式函数是正交归一且完备的：

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}x f_k^*(x)f_{k'}(x)&=\delta_{k,k'},\\ \frac{1}{2\pi}\sum_k f_k^*(x)f_k(x')&=\delta(x-x').\end{aligned} \tag{7}$$

接下来，我们将式 (4) 哈密顿量按照本征模式系数展开，同时注意到正则动量场

$$p(x,t)=-i\sum_k m\omega_k f_k(x)\alpha_k e^{-i\omega_k t}+c.c. \tag{8}$$

这里 $c.c.$ 是对公式中前一项做厄密共轭的意思。

我们有

$$H=\frac{\sigma}{2}\sum_k 4\omega_k^2|\alpha_k|^2. \tag{9}$$

其中 $\sigma=m/\Delta x$ 为机械波振子链的“线密度”。

从式 (9)，我们可以凑一下本征模式振动的“简正坐标”和“动量”：

$$\begin{aligned}Q_k(t)&=i\alpha_k(t)+c.c.,\\ P_k(t)&=\sigma\omega_k\alpha_k(t)+c.c.\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\alpha_k(t)\equiv\alpha_k e^{-i\omega_k t}$，从而有

$$H=\sum_k\frac{P_k^2}{2\sigma}+\frac{1}{2}\sigma\omega_k^2Q_k^2 \tag{11}$$

正则量子化：我们引入 $\hat{Q}_k,\hat{P}_k$ 及互易关系

$$[Q_k,P_{k'}]=i\hbar\delta_{k,k'}$$

或者，互易关系也可以由升降算符引入：令

$$Q_k=\sqrt{\frac{\hbar}{2\sigma\omega_k}}(a_k+a_k^\dagger)$$

$$P_k = \sqrt{\frac{\hbar\sigma\omega_k}{2}}\frac{a_k - a_k^\dagger}{i}$$

则互易关系可以写为：

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$$

$$[a_k, a_{k'}] = 0$$

$$[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0$$

量子化机械振动场的哈密顿量可以写成：

$$\begin{aligned} H &= \sum_k \frac{1}{2}\hbar\omega_k(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) \\ &= \sum_k \hbar\omega_k(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}) \end{aligned} \tag{12}$$

可以定义机械波的真空态 $a_k|V\rangle = 0$，有机械波的“数态”

$$|n\rangle_k = \frac{(a_k^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|V\rangle$$

讨论：式 (5)(12) 中对 k 求和的上限需要满足 $|k| < 1/\Delta x$，因此零点能并不发散。事实上，因为这个 k 空间的限制，式 (7) 正交完备关系中的狄拉克 $\delta(x)$ 函数也只能定义在 Δx 尺度上光滑的函数空间。

由互易关系，我们容易得到海森堡图像下升降算符的演化：

$$i\dot{a}_k = \omega_k a_k$$

$$i\dot{a}_k^\dagger = -\omega_k a_k^\dagger$$

因此有 $a_k(t) = a_k(0)e^{-i\omega_k t}$，$a_k^\dagger(t) = a_k^\dagger(0)e^{i\omega_k t}$.

我们可以用 $a_k, a_k^\dagger$ 来表示量子化机械波振幅和动量算符：

$$\begin{aligned} q(x,t) &= i\sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\sigma L\omega_k}} e^{ikx} a_k e^{-i\omega_k t} + h.c., \\ p(x,t) &= \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\sigma\omega_k}{2L}} e^{ikx} a_k e^{-i\omega_k t} + h.c. \end{aligned} \tag{13}$$

这里 $h.c.$ 是对公式中前一项做厄密共轭的意思。对 q, p 的实空间量子化表述有利于我们在实验室空间描述耦合振子和外界的局部相互作用。

系统的量子态由简振模式的谐振子态直积描述。系统的本征态 $|n\rangle \equiv |...n_j...\rangle$ 可以简记为:

$$|n\rangle = \prod_j |n_j\rangle_j$$

注意，这儿 $\prod_j$ 代表 Hilbert 子空间态矢量的“直乘”。例如，我们考虑第 j 个模式的激发数为 n_j, 第 k 个模式的激发数为 n_k, 那么联合系统的量子态可以由各自量子态直积而得, 记为 $|n_j\rangle_j|n_k\rangle_k$, 或者简单写为 $|n_j, n_k\rangle$，等。

对于一般的机械波量子态，可以展开：

$$|\psi\rangle = \sum_{...n_j...} c_{...n_j...}|...n_j...\rangle$$

讨论：图 (1) 系统的机械波能体现出什么样的量子特性？

1. 量子化能谱？
2. 激发的波粒二相性?
3. 多激发间的量子纠缠？
4. 零点能？
5. ...

主要困难在那儿？如何设计实验，增强这样的量子特性？

C. 电磁场的自由度讨论

要找到电磁场的简正坐标和动量，我们需要明确其自由度。这可以和上述耦合谐振子做一个类比。

首先，我们考虑一根琴弦，将琴弦的振动”粗粒化“，其每一个方向的振动可以认为是一维排列的耦合谐振子，自由度的个数由按照粗粒化的细度 Λ，以及弦的长度 L 决定，自由度数目大概是 $F_s = L/\Lambda$。

三维”标量场“，可以认为是三维的琴弦。其自由度基本上是 $F_3 = F_s^3$。

好了，那么电磁场的自由度是多少呢？我们有电场，有磁场，每个场都是矢量，有 3 个方向，似乎电磁场的自由度是 $6F_3$?

我们发现，电磁场有不少自由度都是冗余的，另一些自由度和物质耦合，详细处理需要运用规范场论的技术。

这儿我们只给出最后的结论：对于自由场，可以确定规范，将电磁场自由度减少到 $2F_3$。直观的来说，就是自由电磁场的辐射是横波。

D. 矢量势

Maxwell 方程中的散度方程不牵涉含时演化，可以认为是约束条件。方程可以通过引入势场 $\{\mathbf{A}, \varphi\}$ 来化简。对于自由场来说，最方便的方法是约定 $\varphi = 0$ 及 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (库伦规范)，那么有:

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

而矢量势本身满足:

$$\partial_t^2 \mathbf{A} - c^2 \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \tag{14}$$

即可保证四个 Maxwell 方程全部成立。

E. 电磁场本征模式

偏微分方程 (14) 的解可以由如下本征方程的解展开：

$$\omega^2\mathbf{A} + c^2\nabla^2\mathbf{A} = 0 \tag{15}$$

我们引入满足上式的归一化模式函数：$\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r})$, 其中 s 指标代表模式的偏振方向，本征频率 $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$ 由色散关系决定，$\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$, 有

$$\int_V d^3\mathbf{r}\ \mathbf{f}^*_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{k}',s'}(\mathbf{r}) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{s,s'} \tag{16}$$

其中 V 为被考察的电磁体系的体积，这儿我们设周期性边条件，边长为 L, 记总体积 $V = L^3$。那么矢量势可以以通解的形式展开为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_s \frac{V}{8\pi^3}\int d^3\mathbf{k}\ \alpha_{\mathbf{k},s}(t)\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r}) + c.c. \tag{17}$$

$\alpha_{\mathbf{k},s}(t)$ 为展开系数。

$$\alpha_{\mathbf{k},s}(t) = \alpha_{\mathbf{k},s}(0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$$

.

这一步，相当于此前耦合谐振子里面的“正则变换”，把自由场的空间耦合对角化了。

注意，我们也常常这么写式 (17) ：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k},s} \alpha_{\mathbf{k},s}(t)\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r}) + c.c. \tag{18}$$

F. 平面波模式

在以上我们考察的边条件下，很容易写出模式函数的具体形式：

$$\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\mathbf{e}_s e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

注意到我们已经约定了矢量势的横波性，$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, 因此我们有，对每个平面波模式 $\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r})$ 来说：

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_s = 0$$

注意真空色散关系 $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$，及 $s = 1,2$ 代表沿着 $\mathbf{k}$ 方向传播光场模式的两个垂直偏振态。

和同学们在热统等课程中得到的结论一样，在大的自由空间 V 下，自由空间形式，边条件及模式函数的选择，并不影响局部的观测量，可以以方便电磁场模式展开研究具体问题为准。这儿，平面波模式对于形式化讨论场的性质是方便的。然而平面波需要充满整个空间，周期性边条件更加难以获得。因此平面波模式 $\{f_{\mathbf{k},s}\}$ 展开对于实际物理问题讨论常常并不方便。这个时候，我们可以引入我们特定关心的模式（如高斯光束），并将其他的模式正交化，获得正交模式函数为 $\{g_{\mathbf{k},s}\}$ 即可。相关光场展开模式变换技术见如下讨论。

G. 电磁场哈密顿量”在简正坐标动量下”的正则表达

接下来我们不再就 Maxwell 方程的拉格朗日变分表达赘述（见 Steck 第 8 章), 而是直接运用我们的电动力学知识，在本征模式下以正则坐标和动量写出电磁场的哈密顿量。对于每个模式 $\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}$, 我们记该模式的”正则坐标“为

$$Q_{\mathbf{k},s}(t) = -i\alpha_{\mathbf{k},s}(t) + c.c.$$

引入：

$$P_{\mathbf{k},s}(t) = -\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}\alpha_{\mathbf{k},s}(t) + c.c.$$

那么，由电磁场哈密顿量

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\mathbf{r}\ \left(\partial_t\mathbf{A}^2 + c^2(\nabla\times\mathbf{A})^2\right)$$

带入展开式 (17)，结合 $\mathbf{f}_s$ 的本征函数特性化简，我们可以得到：

$$\begin{aligned} H &= \frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{\mathbf{k},s} 4|\alpha_{\mathbf{k},s}|^2\omega_{\mathbf{k}}^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k},s}\frac{P_{\mathbf{k},s}^2}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k},s}^2 \end{aligned}$$

这样，自由电磁场和一堆独立的谐振子就完全同构了。而 $Q_{\mathbf{k},s}$ 和 $P_{\mathbf{k},s}$ 作为 $\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}$ 模式的正则坐标和正则动量也显而易见。

H. 量子化

引入无量纲的升降算符：

$$Q_{\mathbf{k},s} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}}(a_{\mathbf{k},s} + a_{\mathbf{k},s}^\dagger)$$

$$P_{\mathbf{k},s} = \sqrt{\frac{\hbar\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}{2}}\frac{a_{\mathbf{k},s} - a_{\mathbf{k},s}^\dagger}{i}$$

电磁场算符的互易关系可以写为：

$$[a_{\mathbf{k},s}, a_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{s,s'}$$

$$[a_{\mathbf{k},s}, a_{\mathbf{k}',s'}] = 0$$

$$[a_{\mathbf{k},s}^\dagger, a_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] = 0$$

自由场的哈密顿量因此可以写成：

$$\begin{aligned} H &= \textstyle\sum_{\mathbf{k},s}\frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} + a_{\mathbf{k},s}a_{\mathbf{k},s}^\dagger) \\ &= \textstyle\sum_{\mathbf{k},s}\hbar\omega_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2}) \end{aligned} \tag{19}$$

注意真空色散关系 $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$，及 $s = 1, 2$ 代表沿着 $\mathbf{k}$ 方向传播光场模式的两个垂直偏振态。

I. 光子数算符

引入单模光场的光子数算符

$$n_{\mathbf{k},s} = a^\dagger_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}$$

那么我们自然有：

$$[a_{\mathbf{k},s}, n_{\mathbf{k},s}] = a_{\mathbf{k},s}$$
$$[a^\dagger_{\mathbf{k},s}, n_{\mathbf{k},s}] = -a^\dagger_{\mathbf{k},s}$$

哈密顿量也可以相应写成

$$H = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2})$$

由 $a, a^\dagger$ 和 n 的互易关系，我们可以即刻写除海森堡方程

$$i\dot{a}_{\mathbf{k},s} = \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},s}$$

$$i\dot{a}^\dagger_{\mathbf{k},s} = -\omega_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k},s}$$

因此，在海森堡表象下，我们有：

$$a_{\mathbf{k},s}(t) = a_{\mathbf{k},s}(0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$$
$$a^\dagger_{\mathbf{k},s}(t) = a^\dagger_{\mathbf{k},s}(0)e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}$$

本课程中，我们常简记 $a_{\mathbf{k},s}(0), a^\dagger_{\mathbf{k},s}(0)$ 为 $a_{\mathbf{k},s}, a^\dagger_{\mathbf{k},s}$。另一些时候，我们会简记海森堡绘景下的 $a_{\mathbf{k},s}(t), a^\dagger_{\mathbf{k},s}(t)$ 为 $a_{\mathbf{k},s}, a^\dagger_{\mathbf{k},s}$，只要是在不会引起误会的情况下。

J. Fock 态

显然，自由场电磁场的态空间是不同 $\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}$ 模式谐振子态的直积。我们对基态的直积称为真空态，记为 $|V\rangle$, 对于任何一个模式 j 来说，其量子态可以由谐振子的本征态构成：

$$|n\rangle_j = \frac{(a^\dagger_j)^n}{\sqrt{n!}}|V\rangle$$

使得

$$\hat{n}_j|n\rangle_j = n|n\rangle_j$$

电磁场的多模"Fock" 态可以记为 $|n\rangle \equiv |...n_j...\rangle$, 代表模式 j 有 n_j 个光子。Fock 态是自由电磁场的本征态：

$$H|n\rangle = \sum_j \hbar\omega_j(n_j + \frac{1}{2})|n\rangle$$

注意，本课程我们也常常简化电磁场模式指标 $\mathbf{k}, s \to j$。

K. 电磁场态矢量的 Fock 态展开

电磁场希尔伯特空间的态矢量可以写为：

$$|\psi\rangle = \sum_{n_{\mathbf{k},s}} c_{\dots n_{\mathbf{k},s}\dots} |\dots, n_{\mathbf{k},s}, \dots\rangle$$

即：所有电磁场模式的本征态排列组合的直积的线性叠加。

$$|\psi\rangle = \sum_{\dots n_j \dots} c_{\dots n_j \dots} |\dots, n_j, \dots\rangle$$

II. 电磁算符和磁场算符

由以上推导可知量子化电磁场过程中 $-i\alpha_{\mathbf{k},s} \to \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k},s}$, 由式 (18) 我们有矢量势算符：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},s} i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{e}_s e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + h.c. \tag{20}$$

注意：我们已经将 $a_{\mathbf{k},s}(t) = a_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$ 带入。可见，式 (20) 的写法是矢量场算符的海森堡绘景下的表达。

注意式 (20) 及以下均有约束条件: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_s = 0$。

电场算符：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_s e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + h.c. \tag{21}$$

磁场算符：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\sum_{\mathbf{k},s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}}} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + h.c. \tag{22}$$

和耦合谐振子类似，我们将场算符表达出来，是因为接下来我们希望考察电磁场和外界的相互作用，而这些相互作用常常并不是直接和某个 $\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}$ 模式耦合，而是和局域电磁场耦合。

A. 用电场代表电磁场

我们已经知道，在库伦规范下的自由电磁场都是由矢量势 $\mathbf{A}$ 决定的。本课程中，我们特别强调电场 $\mathbf{E}$，原因是接下来在光和物质相互作用过程中我们会应用电偶极近似，相互作用可以用 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{d}$ 表达。在我们的课程中，电磁算符如此重要，我们再仔细讨论一下。

注意到电磁场算符对应于物理课观测的量，都是厄密算符，升降算符不是。电磁场算符可以可以分解为降算符部分 $\mathbf{E}^{(+)}$ 和升算符部分 $\mathbf{E}^{(-)}$, 我们引入单光子电场强度,

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k},s} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_s e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{23}$$

以下，为记号简单，我们常隐去模场偏振的 s 指标, 有电场的正频分量：

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r},t)=\sum_{\mathbf{k},s}\mathcal{E}_{\mathbf{k},s}a_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \tag{24}$$

而 $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r},t)=(\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r},t))^{\dagger}$, 从而有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r},t)+\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r},t)$$

B. 小练习 (可跳过)

试计算如下互易子：

$$[\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r},t),\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}',t')] \tag{25}$$

我们将式 (24) 带入, 得

$$[\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r},t),\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}',t')]=\sum_{\mathbf{k},s}\mathcal{E}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r})\mathcal{E}^{*}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r}')e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')}$$

做连续化替换:

$$\sum_{\mathbf{k}}\rightarrow\frac{V}{8\pi^3}\int\mathbf{d}^3\mathbf{k}, \tag{26}$$

有

$$[\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r},t),\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}',t')]=\int\mathrm{d}^3\mathbf{k}\frac{\hbar c}{16\pi^3\varepsilon_0}k\sum_{s}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s^{*}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')}$$

注意这儿有并矢 $\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s^*$ 且 $\mathbf{e}_s\cdot\mathbf{k}=0$，可以通过笛卡尔坐标的“完备关系”，$\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z=\mathbf{1}$ 化简，

$$\sum_{s}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s^*=\mathbf{1}-\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2}$$

因此有 ...

III. 真空态下电磁场的观测

我们已经提到真空态 $|V\rangle$ 是所有电磁场模式基态的直积。注意到，电磁场基态的能量期待值是发散的：

$$E_0=\langle V|H|V\rangle=\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}}\rightarrow\infty$$

这是啥意思呢？写得具体一些：

$$\begin{aligned}\langle V|H|V\rangle&=\frac{\hbar cV}{4\pi^3}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{K}k^2\mathrm{d}kk|_{K\rightarrow\infty},\\&=\frac{\hbar cV}{4\pi^2}K^4|_{K\rightarrow\infty}\end{aligned} \tag{27}$$

和式 (12) 机械波类似，如果我们考虑的体系 V 有限，且光场本征模式最大波数 K 或者最小波长 $\Lambda=2\pi/K$ 是有限的，有一个“截断”值，则真空零点能 E_0 就是有限的了。注意到这个能量和体积 V

成正比，因此，按照“功能原理”，如果体系的边界可以移动，则一般来说边界会互相“吸引”，让 V 下降。这个分析方法，实际上对应的是喀什米尔力的分析方法。一个典型案例是考虑两块导电平板之间的吸引力。

本课程中，我们关心的是电磁场和量子化体积内物质的相互作用，那么零点能 E_0 就是一个常数，没有多大关系。计算的时候，我们常常就简单的忽略了：

$$H \to H - E_0$$

我们也可以计算电场算符的期待值：

$$\langle V|\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|V\rangle = 0$$

这是因为电场算符由 $a, a^\dagger$ 构成，$a|V\rangle = 0$, $\langle V|a^\dagger = 0$。

那么，接下里，我们算一算电场强度的真空涨落：

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\langle V||\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t)||V\rangle - \langle V||\mathbf{E}(\mathbf{r},t)||V\rangle^2}$$

将 $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(+)} + \mathbf{E}^{(+)}$ 分解为仅有 a 和仅有 $a^\dagger$ 的分量，我们发现：

$$\begin{aligned}\langle V||\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|^2|V\rangle &= \langle V|\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r},t)|V\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k},s}|\mathcal{E}_{\mathbf{k},s}|^2\end{aligned}$$

因此，虽然电场在真空态下的期待值是零，但是涨落也几乎是无穷大的，联系到真空零点能 E_0 的表达，我们有：

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|_{\text{vacuum}} = \sqrt{\frac{E_0}{\varepsilon_0 V}}$$

这种涨落物理吗？当前，我们的物理模型本身是简单的，这种无穷大的涨落对应于“截断波数”K 无穷大，当然是不物理的。在更加全面的模型中，K 的截断和更深层次的物理相关，包括和电子-正电子相互作用能标 – 康普顿波长 $\lambda_c = \hbar/m_e c$。我们发现，在那样的描述下，电子在真空中是“不断抖动”的，而驱动这样的“抖动”的场，正是真空电磁涨落。

如你们预期的，我们这节课不能讲这些，在计算电磁场相关量的时候，遇到类似的发散，我们提取其中“物理”的部分，把其他的“无穷大”简单的忽略掉。

A. 光场算符的模式变换

注意到实际应用中，对算符的模式分解是希望分解到“好用”的模式上，我们考虑包含这些“好用”模式的电磁场模式函数集合为 $\{g_l\}$，那么，电场算符也可以表达为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_l \mathcal{E}_l' b_l + h.c.$$

如果模式函数存在幺正变换关系：

$$\mathcal{E}_l' = \sum_k S_{lk}\mathcal{E}_k. \tag{28}$$

其中 S 矩阵的幺正性是说：

$$\sum_k S_{kl}^* S_{kl'} = \delta_{ll'}$$

带入，我们有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_l \sum_k S_{lk}\mathcal{E}_k b_l + h.c.$$

那么很显然

$$\sum_l S_{lk} b_l = a_k$$

更加方便的记法是：

$$b_l^\dagger = \sum_k S_{lk} a_k^\dagger \tag{29}$$

注意，由式 (28)(29), 模式函数变换矩阵，对应于升算符的变换矩阵。

IV. 光场算符的模式分解

以上我们对电磁场算符和态矢量的表达，都兼顾了所有的电磁场模式 $\{\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}\}$。接下来，我们要做的一系列计算和推导，这样的写法非常累赘。注意到自由电磁场不同模式的演化是独立的。

一般来说，对于特定的模式函数集 $\{\mathbf{g}_l\}$，我们完全可以将算符做模式分解 (为方便起见，假设模式频率和平面波模式频率一一对应)：

$$H_l = (n_l + \frac{1}{2})\hbar\omega_l$$

$$\mathbf{E}_l(\mathbf{r},t) = \mathcal{E}_l^{'}(\mathbf{r}) b_l e^{-i\omega_l t} + h.c.$$

在不产生误会的情况下，我们会忽略模式 $\mathcal{E}_l^{'}$ 上标 $'$.

直接作用到描述相应模式的谐振子态矢量 $|\psi\rangle_l = \sum_n c_n |n\rangle_l$ 上。

在不产生误会的情况下，我们甚至会忽略模式下标 l.

V. GLAUBER 相干态

由于自由电磁场动力学就是不同模式谐振子动力学的直积，那么，我们此前讨论的谐振子位移算符和相干态当然可以套用。

注意到，我们对我们熟悉的谐振子的位移和动量有很好的直觉图像。这儿，当我们考察电磁场单个模式的“相空间”位移时，可以和谐振子图像做一个直接类比，建立物理图像，培养直觉。

对于任何一个模式 $\mathbf{f}_l$, 我们可以写出该模式的位移算符：

$$D_l(\alpha) = e^{\alpha a_l^\dagger - \alpha^* a_l}$$

那么，该模式的光子相干态就可以写为：

$$|\alpha\rangle_l = D_l(\alpha)|V\rangle$$

一般来说，相干态可以由多模位移算符作用到真空实现：

$$D(\alpha) = \prod D_l(\alpha_l) = e^{\sum_l \alpha_l a_l^\dagger - h.c.}$$

相应相干态的态矢量可以写为：

$$|\alpha\rangle \equiv |..., \alpha_l, ...\rangle = D(\alpha)|V\rangle$$

我们已经知道，相干态 $|\alpha\rangle$ 是降算符 a 的本征态，那么自然有：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r},t)|\alpha\rangle &= \textstyle\sum_l \mathcal{E}_l \alpha_l |\alpha\rangle \\ \langle\alpha|\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r},t) &= \langle\alpha| \textstyle\sum_l \mathcal{E}_l^* \alpha_l^* \end{aligned} \tag{30}$$

进而有

A. 场算符的期待值及经典对应

$$\langle\alpha|\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|\alpha\rangle = \mathbf{E}_{a_l\to\alpha_l, a_l^\dagger\to\alpha_l^*}(\mathbf{r},t)$$

就是说，相干态下电场算符的期待值的计算非常简单，就是把所有 a 算符用相应相空间位移量 α 代替，把所有 $a^\dagger$ 算符用相应相空间位移量 α^* 代替，因此算符就变成复数了。

事实上，我们的经典电动力学直觉均建立在相干态基础上，

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \to \mathcal{E}(\mathbf{r},t)\alpha$$

第一个指出这个事实的，应该是 Roy Glauber

另一方面，电磁场能量的期待值可以很方便的计算

$$\langle\alpha|H|\alpha\rangle = H_{a_l\to\alpha_l, a_l^\dagger\to\alpha_l^*} = \sum_l \hbar\omega_l(|\alpha_l|^2 + \frac{1}{2})$$

B. 正则排序

事实上，由式 (30) 我们发现如下规律：

$$\langle\alpha|E^{(-)}E^{(-)}...E^{(+)}E^{(+)}|\alpha\rangle = (E^{(-)}E^{(-)}...E^{(+)}E^{(+)})_{a_j\to\alpha_j, a_j^\dagger\to\alpha_j^*}$$

这儿 $E^{(-)}E^{(-)}...E^{(+)}E^{(+)}$ 是说把所有光场算符的正频分量放右边，负频分量放左边。更加一般的来说，我们定义场算符 $f(a, a^+)$ 的“正则排序”：

$$\hat{N}[f(a, a^\dagger)] = \sum c_{m,n}(a^\dagger)^m a^n$$

即不管算符 $f(a,a^\dagger)$ 具体形式如何，我们将之泰勒展开后，总是把升算符往左，降算符往右。多模推广也是显然的。

那么相干态有如下特点：

$$\langle\alpha|\hat{N}[f(a,a^\dagger)]|\alpha\rangle = f(\alpha,\alpha^*) \tag{31}$$

C. 相干态下电磁场的涨落

有了式 (31), 计算相干态下观测量就变得很方便，基本上就是把算符由互易子做加减法，最后成为正则排序。举例来说，

$$\langle\alpha|n^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a a^\dagger a|\alpha\rangle$$
$$= \langle\alpha|a^\dagger a^\dagger a a|\alpha\rangle + \langle\alpha|a^\dagger[a,a^\dagger]a|\alpha\rangle$$
$$= |\alpha|^4 + |\alpha|^2$$

我们发现：

$$\Delta n_{|\alpha\rangle} = \sqrt{\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2} = |\alpha|$$

类似的，为计算电场的涨落

$$\begin{aligned}\langle\alpha||\mathbf{E}|^2|\alpha\rangle &= \langle\alpha|\mathbf{E}^{(-)}\cdot\mathbf{E}^{(-)} + \mathbf{E}^{(-)}\cdot\mathbf{E}^{(+)} + \mathbf{E}^{(+)}\cdot\mathbf{E}^{(-)} + \mathbf{E}^{(+)}\cdot\mathbf{E}^{(+)}|\alpha\rangle \\ &= \langle\alpha|\mathbf{E}|\alpha\rangle^2 + \langle\alpha|\sum_{j=x,y,z}[\mathbf{E}_j^{(+)},\mathbf{E}_j^{(-)}]|\alpha\rangle\end{aligned}$$

因此我们容易得到：

$$\Delta\mathbf{E}|_{|\alpha\rangle} = \sqrt{\sum_l |\mathcal{E}_l|^2} = \Delta E_{\text{vacuum}}$$

相干态的电场期待值可以非常大 ($\alpha \gg 1$)，但是，涨落却和真空涨落大小是一样的。因此相干态下的电场很接近经典电磁波。

VI. 热态

以上的 Fock 态，相干态，等，都是电磁场的纯态，可以写成 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 的密度矩阵形式，计算熵，$S = -\text{trace}(\rho\ln\rho) = 0$。

人类的知识是有限的，一般来说，电磁场的量子态是混合态，一个最常见的混合态是热态。

我们考虑单模光场 $\mathbf{f_k}$ 模式，由热统知识，我们知道该模式的密度矩阵可以写为：

$$\rho = \frac{1}{Z}e^{-\beta H}$$

其中 $\beta = 1/k_{\text{B}}T$, $k_{\text{B}} = 1.38\times10^{-23}$ 焦耳/卡尔文是玻尔兹曼常数，T 是体系温度。

由 $H=\hbar\omega(\hat{n}+1/2)$, 我们可以将 ρ 在 Fock 表象下展开（注意零点能可以被配分函数 Z 吸收）:

$$\rho_{mn}=\frac{1}{Z}e^{-n\beta\hbar\omega}\delta_{mn}$$

有 $\mathrm{trace}(\rho)=\sum\rho_{nn}=1$，我们发现

$$Z=\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$

我们可以算一下平均光子数：

$$\begin{aligned}\bar{n}&=\mathrm{trace}(\rho n)\\&=\frac{1}{Z}\sum_n ne^{-n\beta\hbar\omega}\\&=-\frac{1}{\hbar\omega Z}\partial_\beta Z\\&=\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\end{aligned}$$

讨论：对于可见光，$\hbar\omega\sim 1eV$, 对应温度为 $T\sim 1eV/k_B\sim 10^5\mathrm{K}$，因此，在自然界，热光源几乎总是有 $\bar{n}\ll 1$.

我们还可以算一下平均光子数平方

$$\begin{aligned}\overline{n^2}&=\mathrm{trace}(\rho n^2),\\&=\frac{1}{Z}\sum_n n^2e^{-n\beta\hbar\omega},\\&=\frac{1}{(\hbar\omega)^2Z}\partial_\beta^2 Z,\\&=2\bar{n}^2+\bar{n}.\end{aligned}\tag{32}$$

因此，我们发现，热态的光子数涨落是很大的,

$$\Delta n_\beta=\sqrt{\overline{n^2}-\bar{n}^2}=\sqrt{\bar{n}^2+\bar{n}}\tag{33}$$

竟然有 $\Delta n>\bar{n}$.

VII. 光场模式的慢变化振幅近似

我们回到自由电场的波动方程：

$$(\partial_t^2-c^2\nabla^2)\mathcal{E}=0$$

我们已经有平面波解 $\mathbf{f}_{\mathbf{k},s}e^{-i\omega_\mathbf{k}t}=\frac{1}{\sqrt{V}}\mathbf{e}_s e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega_\mathbf{k}t}$。

接下来，我们考察波动方程的如下解：$\mathcal{E}=\mathcal{A}(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_s e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_0 t)}$, $\mathbf{k}=(0,0,k_0)$ 沿着 z 方向，并且假设包络函数 $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$ 是缓变的：

$$|\partial_t^2\mathcal{A}|\ll\omega_0|\partial_t\mathcal{A}|$$

$$|\nabla^2\mathcal{A}|\ll k_0|\nabla\mathcal{A}|$$

在该慢变化振幅极限下，我们有:

$$i(\partial_z+\frac{1}{c}\partial_t)\mathcal{A}(\mathbf{r}_\perp,z,t)=-\frac{\nabla_\perp^2}{2k_0}\mathcal{A}(\mathbf{r}_\perp,z,t) \tag{34}$$

其中 $\nabla_\perp=(\partial_x,\partial_y)$ 是垂直于光传播方向的 ∇ 算符。

VIII. 第一次作业的第二部分

1. 考察式 (12) 哈密顿量及式 (13) 海森堡表象下振幅 q 及动量 p 算符。写出 q,p 算符在薛定谔表象下的表达式。

2. 仍考察式 (12) 哈密顿量，在本题中记为 H_0，引入外界扰动

$$V=\int \mathrm{d}xF(x)q(x)$$

其中 $F(x)=F_0\cos(\omega_F t)\delta(x)$ 是周期性驱动力，作用在坐标原点 $x=0$。

因此总哈密顿量成为

$$H=H_0+V$$

。请写出 $V-$ 相互作用表象下的哈密顿量，并规整出 $H_\mathrm{I}=\sum g_k(t)a_k+h.c.$ 的形式。

3. 继续上一题，我们考虑机械波的初态是真空态，$|\psi(0)\rangle=|V\rangle$, 试论证 $|\psi(t)\rangle$ 必为某种相干态 $\prod_k D_k(\alpha_k)|V\rangle$。

4. 联系上下文，从式 (28) 详细推导式 (29).

5. 详细推导式 (32)