

随机波函数方法

吴赛骏*

复旦大学物理系, 上海 200433, 中国。

本文档随教学进程跟新。

I. 总结性回顾

A. 开放系统的量子力学方法推导

在上节课我们考虑了原子和单模光场作为开放系统，下面我们再次用一个一般案例回顾以下：
一般来说，系统 S 和环境 R 的哈密顿量可以写为：

$$H = H_R + H_S + H_{RS}$$

其中系统的分立能级对角化后， H_S 总可以表达为：

$$H_S = \sum_j \hbar \omega_j S_j^\dagger S_j$$

而环境的连续态可以形式化的写为：

$$H_R = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} R_{\mathbf{k}}^\dagger R_{\mathbf{k}}$$

相互作用写为

$$H_{RS} = \sum_{j,\mathbf{k}} \hbar g_{j,\mathbf{k}}^* R_{\mathbf{k}}^\dagger S_j + h.c.$$

系统和环境的耦合由耦合系数 $g_{j,\mathbf{k}}$ 及连续态密度 $\rho(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$ 描述。如 [L8 图 4]， $|g_{j,\mathbf{k}}|^2 \rho(\omega_{\mathbf{k}})$ 在系统共振频率 ω_j 附近的特征频谱宽度为 $\Delta\omega$ ，关联时间为 $\tau_R = L_R/c$ 。当我们关心的系统时间尺度 δt 满足：

$$\tau_R \gg \delta t \gg 1/\Delta\omega$$

时，系统通过环境的自作用可以近似为即时响应，没有记忆。设环境为真空初态，我们获得薛定谔绘景下系统密度矩阵 ρ_S 的主方程：

$$i\hbar \dot{\rho}_S = H_{\text{eff}} \rho_S - \rho_S H_{\text{eff}}^\dagger + \sum_j C_j \rho_S C_j^\dagger \quad (1)$$

其中量子坍缩算符 $C_j = \sqrt{\Gamma_j} S_j$ 由系统和环境的耦合

$$\hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{j,\mathbf{k}}^* R_{\mathbf{k}}^\dagger S_j + h.c.$$

导致。坍缩率

$$\Gamma_j = \sum_{\mathbf{k}} |g_{j,\mathbf{k}}|^2 \delta(\omega_j - \omega_{\mathbf{k}})$$

可以由费米黄金规则得到。等效哈密顿量可以写为：

$$H_{\text{eff}} = H_0 - \sum_j i \frac{\hbar}{2} C_j^\dagger C_j = \sum_j \hbar (\omega_j - i\Gamma_j/2) S_j^\dagger S_j$$

* saijunwu@fudan.edu.cn

此外，由 Wigner-Weisskopf 过程，我们还可以获得“Lamb”移动：

$$\delta_j = \sum_{\mathbf{k}} P \frac{|g_{j,\mathbf{k}}|^2}{\omega_j - \omega_{\mathbf{k}}}$$

实际问题分析过程中我们常常对 $\omega_j - \delta_j \rightarrow \omega_j$ 重整化，简化记号。

而在海森堡绘景下，系统的动力学变量由海森堡-朗之万方程描述：

$$i\hbar\dot{S}_j = S_j H_{\text{eff}} - H_{\text{eff}}^\dagger S_j + \hbar[S_j, S_j^\dagger] \hat{F}_j(t) \quad (2)$$

其中

$$\hat{F}_j(t) = \sum_{\mathbf{k}} g_{j,\mathbf{k}} R_{\mathbf{k}}(0) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_j)t}$$

是随机涨落力，对于环境真空态来说，

$$\langle \hat{F}_j(t) \hat{F}_j^\dagger(t') \rangle = \Gamma_j \delta(t - t')$$

注意，上述总结性推导同时假设了系统能级 ω_j 不简并。如果 S_{j_1, j_2} 两个激发有简并， $\omega_{j_1} \approx \omega_{j_2}$ ，那么系统和环境的相互作用就针对了同一个频段的 $R_{\mathbf{k}}$ ，根据 $g_{j_1, j_2, \mathbf{k}}$ 结构异同，可能会出现相干性，具体表现为在 $\delta t < 1/\delta\omega_{j_1, j_2}$ 时间尺度上耗散过程的干涉现象。相关案例会在本节课量子拍小节讨论。

B. 非厄密演化

如果系统的 Hilbert 空间维度是 N ，那么系统的态矢量 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ 可以由 N 个基矢 $\{|n\rangle\}$ 来展开，而密度矩阵 $\rho = \sum_{m,n} \rho_{mn} |n\rangle\langle m|$ 或观测量 $O = \sum O_{mn} |m\rangle\langle n|$ 则需要 N^2 个基矢 $\{|m\rangle\langle n|\}$ 来展开。因此，无论是从解析推导或数值分析的角度，薛定谔方程常常比主方程和海森堡-朗之万方程方便。

从主方程 (1)，我们试图写这样的方程：

$$i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle = H_{\text{eff}} |\psi(t)\rangle \quad (3)$$

这个方程有一个大问题：由于 $H_{\text{eff}} \neq H_{\text{eff}}^\dagger$ ，式 (3) 中波函数 $|\psi(t)\rangle$ 演化对模不守恒：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle &= -i \langle \psi(t) | H_{\text{eff}} - H_{\text{eff}}^\dagger | \psi(t) \rangle \\ &= - \langle \psi(t) | \sum_j C_j^\dagger C_j | \psi(t) \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

这样的非厄密演化一个常用的“诠释”是“方法是 $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$ 的消退对应”系统渐渐的不存在了。“例子很多，除我们一直介绍的自发辐射，腔场漏光外，还有：

- 1) 核子衰变
- 2) 真空电离

...

众多案例。然而严格说来，“系统不存在”和量子力学框架并不兼容。我们只能说“原子回到基态”，“ ^{40}K 变成了 ^{40}Ca ”，“中性原子变成了离子”，等等，并非“不存在了”。更加一般的来说，从式 (1) 最后一项我们看到，系统会被 $C_j \rho C_j^\dagger$ 项“回收”到 $C_j |\psi(t)\rangle$ 状态。

是否有一个系统的方法讨论开放系统的波函数演化呢？

II. 光和原子相互作用

A. 假想实验：探测器环境中的原子

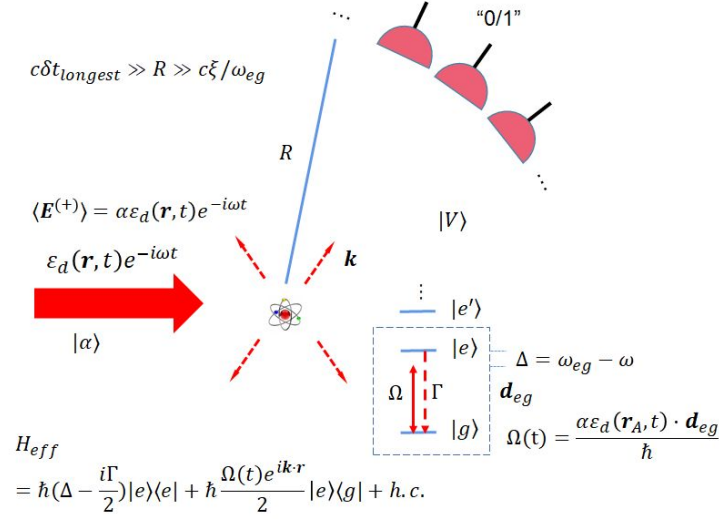


图 1. Monitor the spontaneous emitted photons from a 2-level atom.

1. 系统 + 环境哈密顿量回顾

如图 (1), 我们回到光和原子相互作用

$$H = \hbar \sum_{e,g} (\omega_e |e\rangle\langle e| + \omega_g |g\rangle\langle g|) + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \quad (5)$$

这次我们考虑了激光激发, 不同于 L3 的半经典近似方法, 我们可以对 \mathcal{E}_d 模式做酉变换: $|\alpha\rangle \rightarrow |V\rangle$ 以及 $a \rightarrow a + \alpha$, 并在“位移后”真空态下做旋转波近似, 形成二能级近似:

$$H = \hbar \Delta |e\rangle\langle e| - \hbar \frac{\Omega}{2} |e\rangle\langle g| + h.c. + \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^* e^{i-\Delta_{\mathbf{k}} t} a_{\mathbf{k}}^\dagger |g\rangle\langle e| + h.c. \quad (6)$$

式 (6) 可以和 [L3 式 (3)] 对比: 第二行是真空相互作用项。此外, 和 [L10 式 (62)] 对比, 一个不重要的区别是这儿 $\Delta_{\mathbf{k}} = \omega - \omega_{\mathbf{k}}$ 是真空模式频率相对于激光频率的失谐量。

考虑系统和环境的联合波函数在 t 时刻是 $|\psi(t)\rangle = |\psi_A(t)\rangle|V\rangle$, 由 L10 的 Wigner-Weisskopf 步骤, 可以推出:

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = e^{-iH_{eff}\delta t} |\psi_A(t)\rangle|V\rangle + \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^* \frac{e^{-i\Delta_{\mathbf{k}}\delta t} - 1}{\Delta_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^\dagger |g\rangle\langle e| \psi_A(t)\rangle|V\rangle \quad (7)$$

其中

$$H_{\text{eff}} = \hbar(\Delta - i\Gamma/2)|e\rangle\langle e| - \hbar\frac{\Omega}{2}|e\rangle\langle g| + h.c.. \quad (8)$$

2. 条件量子态

由于式 (56) 中的 $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ 相互作用，在 δt 时间内系统和环境产生了”纠缠“。此前我们对环境自由度部分求迹获得主方程 (L10 Eq. (78))，现在我们直接考虑条件量子态：

首先，环境仍处于真空态的第一项，其概率是

$$\langle \psi_A(t) | e^{iH_{\text{eff}}^\dagger \delta t} e^{-iH_{\text{eff}} \delta t} | \psi_A(t) \rangle = 1 - \Gamma |\langle e | \psi_A(t) \rangle|^2 \delta t$$

我们有条件量子态：

$$|\psi_A(t + \delta t)\rangle_{N0} = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}} \delta t} |\psi_A(t)\rangle$$

相应的，环境是单光子态的概率是第二项系数的模平方，按照 Markovian 近似精神，我们有 $\delta P = \Gamma |\langle e | \psi(t) \rangle|^2 \delta t$ 概率下的条件量子态

$$|\psi_A(t + \delta t)\rangle_{N1} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\Delta_{\mathbf{k}} \delta t} - 1}{-\Delta_{\mathbf{k}}} g_{\mathbf{k}}^* |g\rangle \langle e | \psi_A(t) \rangle \rightarrow |g\rangle$$

3. 4π 立体角光子监控

如图 (1)，我们考虑系统以外距离 R 放置单光子探测器，由以上论述，在 δt 时间内，

1) 所有探测器都没有探测到任何光子的概率是 δP ，系统条件演化为 $|\psi_A(t + \delta t)\rangle = |\psi_A(t + \delta t)\rangle_{N0}$ 。

2) 任何一个探测器探测到光子，系统条件演化为 $|\psi_A(t + \delta t)\rangle = |\psi_A(t + \delta t)\rangle_{N1}$ 。

我们可以数值模拟这样的假想实验，并继续 $|\psi_A(t + \delta t)\rangle \rightarrow |\psi_A(t + 2\delta t)\rangle$ 演化，这个过程是随机波函数的思想方法。

和 4π 光子数探测对应，我们引入量子坍缩算符

$$C = \sqrt{\Gamma} |g\rangle \langle e| \quad (9)$$

4. 方向分辨光子探测

在随机波函数方法中，量子坍缩算符 C 和探测方法相关。上述 $C = \sqrt{\Gamma} |g\rangle \langle e|$ 的引入是基于 4π 光子探测。如图 (2a)，如果我们考虑 $\hat{\mathbf{k}}$ 方向分辨的光子探测，那么可以以立体角元 $\delta\Omega$ 为单位，在 4π 方向引入：

$$C_{\hat{\mathbf{k}}} = \sqrt{\Gamma_{\hat{\mathbf{k}}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} |g\rangle \langle e| \quad (10)$$

其中 $\Gamma_{\hat{\mathbf{k}}} \sim \frac{\delta\Omega}{4\pi} \Gamma$ 是沿着 \mathbf{k} 方向的自发辐射率，归一化条件：

$$\sum_{\mathbf{k}} C_{\hat{\mathbf{k}}}^\dagger C_{\hat{\mathbf{k}}} = \Gamma |e\rangle \langle e| \quad (11)$$

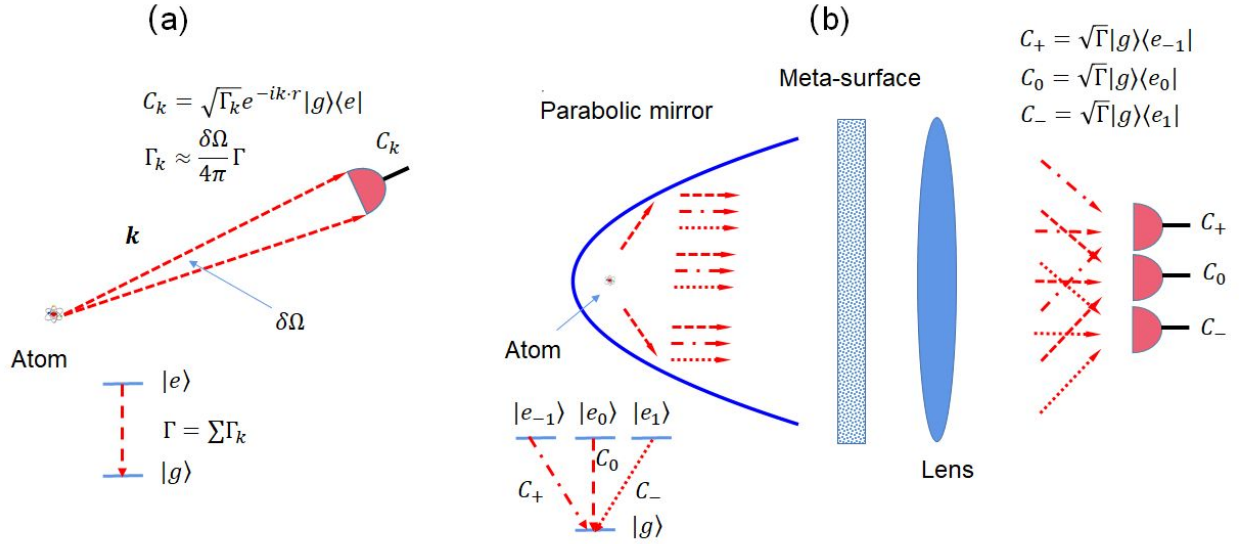


图 2. (a): angular-resolved fluorescence detection. (b): Polarization-dependent full-angle fluorescence detection. A 4π -parabolic mirror convert the dipole pattern to plane wave. The σ^+ , π , σ^- emitted photons are routed by a "meta-surface" and a lense into three detectors.

我们有 \mathbf{k} 方向光子探测概率:

$$\delta P_{\mathbf{k}} = \langle \psi_A(t) | C_{\mathbf{k}}^\dagger C_{\mathbf{k}} | \psi_A(t) \rangle \delta t$$

相应的:

$$|\psi_A(t + \delta t)\rangle_{N1\mathbf{k}} \rightarrow e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_A} |g\rangle$$

这儿我们姑且计入原子的质心坐标为 \mathbf{r}_A 。

对于点状单原子来说 $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_A} |g\rangle$ 的相因子并不重要, 因此方向分辨探测和 4π 联合探测没有任何区别 – 在本节后半部分, 我们将发现, 如果体系的经典尺度或波函数尺度超过光学波长, 则方向分辨探测称为量子态完备描述的必要条件, 而 $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_A}$ 相因子向非局域的原子质心波函数写入光子反冲动量。

5. $-\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}$ 相互作用及 4π 偏振模式分辨光子探测

以上我们只考虑了二能级 $|g\rangle - |e\rangle$ 跃迁, 相应光子辐射的偏振性完全有偶极矩阵元 \mathbf{d}_{eg} 决定, 自发光子的偏振自由度被预设, 在随机波函数产生过程中并不重要。

现实生活中, 原子的自发辐射光子必然有偏振性, 见 L10 的讨论。这儿我们取最简单的 $J = 0 - J = 1$ 跃迁 [L10 图 6a], 对应原子态有 $\{|g\rangle, |e_{-1}\rangle, |e_0\rangle, |e_1\rangle\}$ 构成。如图 (2a) 的方向分辨并不足以描述该量子态, 我们必须引入光子偏振, 可以由方向分辨探测 (图 (2a)) 或者 4π 探测描述。其中方向分辨探测需要注意到光子偏振的横波性: $\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0$ 。

这儿我们考虑 4π 探测, 如图 (2b) 所示, 我们考虑原子的自发辐射光子被抛物镜 4π 收集。注意辐射光子有三种, 分别对应于

$|e_{-1}\rangle \rightarrow |g\rangle$ 的 σ^+ 光子

$|e_0\rangle \rightarrow |g\rangle$ 的 π 光子

$|e_1\rangle \rightarrow |g\rangle$ 的 $\sigma-$ 光子

经过抛物镜准直后，三种光子模式 $\mathcal{E}_{0,\pm 1}$ 具有特定的空间偏振依赖。我们假设某种”超表面材料“可以将三种偏振分开，然后被透镜聚焦，分别被 $D_{+,0,-}$ 三个探测器测得。相应的，我们可以引入量子坍缩算符：

$$\begin{aligned} C_+ &= \sqrt{\Gamma}|g\rangle\langle e_{-1}| \\ C_0 &= \sqrt{\Gamma}|g\rangle\langle e_0| \\ C_- &= \sqrt{\Gamma}|g\rangle\langle e_1| \end{aligned} \quad (12)$$

需要注意的是，不同于 L10，此处及接下来我们总将量子坍缩算符和探测器一一对应，是随机波函数方法的要领。

B. 精细跃迁

见 L10 图 6 及式 (84)(85)，注意，由于相同偏振的光子是无法区分的，因此 σ 偏振光子自发辐射对应的量子坍缩算符会出现如下形式：

$$C_\sigma = \sqrt{\Gamma} \sum_m c_{m\sigma} |g, m - \sigma\rangle \langle em|$$

其中 $c_{m\sigma}$ 和跃迁矩阵元的相对强度相关，在原子物理中常常由 Clebsch-Gordan 系数决定。而这样的跃迁相干叠加，意味着激发态的塞曼子能级相干性在自发辐射后可以被保留到基态的塞曼子能级。

C. 随机波函数方法-1

随机波函数方法首先是一个数值方法，按照波函数归一化要求有两个形式，这儿先介绍第一个形式（波函数始终归一）。

我们考虑系统具有如下特征：

有效哈密顿量

$$H_{\text{eff}} = H_0 - \frac{i\hbar}{2} \sum_j C_j^\dagger C_j$$

量子坍缩算符集 $\{C_j\}, j = 1, \dots, M$ 。

系统初态 $|\psi(t=0)\rangle$ ，关心的动力学时间间隔： $t \in [0, T]$ 。运用随机波函数方法计算开放系统观测量 $\langle O \rangle$ 的步骤如下（为简便记号， $|\psi_A\rangle \rightarrow |\psi\rangle$ ）：

1. 设随机波函数初态 $|\psi(t=0)\rangle_s = |\psi(0)\rangle$ ，依据 $H_{\text{eff}}\delta t$ 矩阵元 $\ll 1$ 的原则设计合适的演化步长 $\delta t = T/N$ ，循环如下 2-4 步 N 次获得 $|\psi(t)\rangle$ 在 $[0, T]$ 时间内的”随机量子轨迹“ $|\psi(t)\rangle_s$ 。
2. 计算量子跃迁概率 $\delta P_j = \langle \psi(t) | C_j^\dagger C_j | \psi(t) \rangle_s \delta t$ ，数值获取随机数 $r \in [0, 1]$ 。
3. 比较 r 和 $P_{j_c} = \sum_{j=1}^{j_c} \delta P_j$ ，并记 $P_0 = 0$ ：
 - a) 如果 $r \in [P_{j_c-1}, P_{j_c}]$ ，则量子态坍缩于第 j_c 个探测通道： $|\psi(t + \delta t)\rangle_s = C_{j_c} |\psi(t)\rangle_s$ 。

b) 如果 $r > P_M$, 则无量子坍缩, 系统按照非厄密有效哈密顿量相干演化: $|\psi(t + \delta t)\rangle_s = e^{-iH_{\text{eff}}\delta t}|\psi(t)\rangle_s$

4. 归一化: $\mathcal{N}^2 = \langle \psi(t + \delta t) | \psi(t + \delta t) \rangle_s$ 。 从而有 $|\psi(t + \delta t)\rangle_s \leftarrow \frac{1}{\mathcal{N}} |\psi(t + \delta t)\rangle_s$ 。

5. 重复上述 1-4 步骤 $s = 1, \dots, N_s$ 次, 然后, 重构密度矩阵:

$$\rho \approx \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} |\psi(t)\rangle_s \langle \psi(t)|$$

计算观测量的随机波函数期待:

$$\langle O \rangle_s = \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle_s$$

以及平均值:

$$\langle O \rangle \equiv \text{trace}(\rho O) \approx \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} \langle O \rangle_s$$

D. 二能级原子案例

我们考虑式 (8) 有效哈密顿量, 及式 (9) 量子坍缩算符。

接下来举几个例子, 针对随机波函数, 我们会考虑如下三个问题:

Q1) 原子系统在 $t = [0, T]$ 时刻不发生量子坍缩 (自发辐射) 的概率, 以及相干演化规律如何?

Q2) 在 $[0, T]$ 相干演化的原子系统在 $t = T$ 时刻发生量子坍缩的条件坍缩率 γ_c , 自发辐射后的量子态, 及此后的演化规律如何?

Q3) 4π 计数器的计数率 $\gamma(t) = \langle C^\dagger C \rangle$ 是多少?

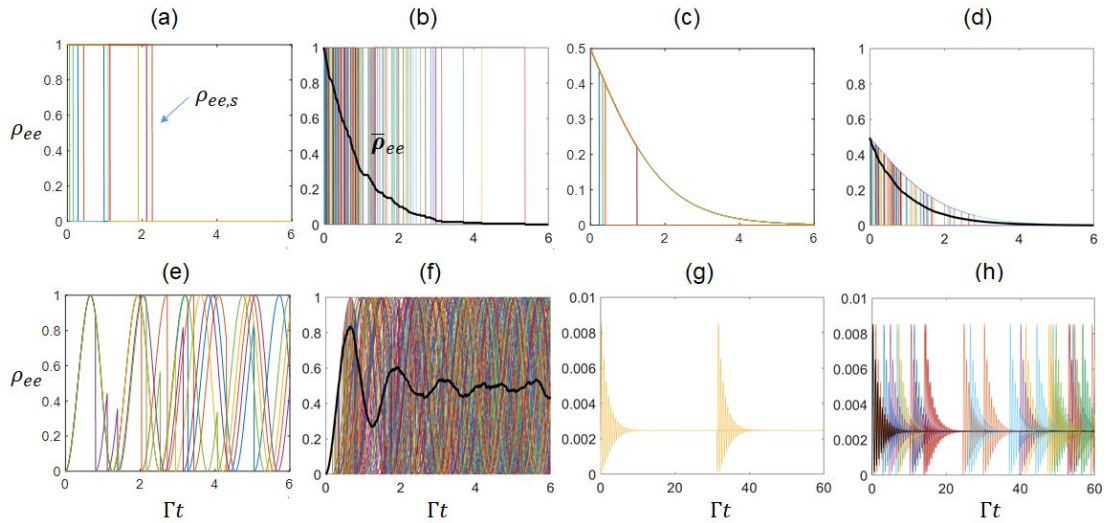


图 3. Excited state population for stochastic trajectories with (a,b): $|\psi(0)\rangle = |e\rangle$. (c,d): $|\psi(0)\rangle = (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$. (e,f): $|\psi(0)\rangle = |g\rangle, \Omega = 5\Gamma, \Delta = 0$. (g,h): $|\psi(0)\rangle = |g\rangle, \Omega = \Gamma, \Delta = 10\Gamma$.

1. 自发辐射

第一个例子考虑 $|\psi(t=0)\rangle = |e\rangle$, $\Omega = 0$ 的自由原子自发辐射。

按照第 (II C) 的方法可以得到随机波函数 $|\psi(t)\rangle_s$ 。为讨论方便，我们需要用图示来表达波函数的演化。对于二能级系统来说，一个比较好的方法是考察二能级原子的布居数。为此，我们设观测量 $O = |e\rangle\langle e|$ 。图 (3a,b) 给出单次随机波函数下 $\rho_{ee,s}$ 及 M 次平均值 $\bar{\rho}_{ee}$ 。注意到 $\langle C^\dagger C \rangle = \Gamma \rho_{ee}$ ，因此 ρ_{ee} 同时决定量子坍缩率，或者是假象 4π 探测器的计数率。

Q1) answer:

不发生自发辐射，系统以 $H_{\text{eff}}(\Omega = 0)$ 演化，有

$$|\psi(t)\rangle_{s,NJ} = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{-iH_{\text{eff}}t} |e\rangle \equiv |e\rangle$$

这样的量子轨迹出现的概率可以按照如下方法计算：

在 $t \in [0, \delta t]$ 时间内不发生自发辐射的概率是 $P_{NJ}(\delta t) = 1 - \delta P_J = 1 - \Gamma \delta t$ ，接下来任何 δt 时间内也一样，因此我们有

$$P_{NJ}(T) = (P_{NJ}(\delta t))^{T/\delta t} = (1 - \Gamma \delta t)^{T/\delta t} = e^{-\Gamma T}$$

Q2) answer: 在 T 时刻发生自发辐射的条件坍缩率很容易写出：

$$\gamma_c(T) = \frac{\delta P_c}{\delta t} = \langle \psi(T) | C^\dagger C | \psi(T) \rangle_{s,NJ} = \Gamma$$

坍缩后有量子态

$$|\psi(T^+)\rangle_s = |g\rangle$$

且由于是自由原子 ($\Omega = 0$)，接下来

$$|\psi(t > T)\rangle_s = |g\rangle$$

Q3) 4π 计数器的计数率是可以从 $\rho(t)$ 的计算获得，也可以从如下考虑：由于激发态原子只自发辐射一次，因此， t 时刻的计数完全由 $|\psi(t)\rangle_{s,NJ}$ 贡献，我们因此有计数率是条件态概率和条件坍缩率的乘积：

$$\gamma(t) = P_{NJ}(t) \gamma_c(t) = e^{-\Gamma t} \Gamma$$

接下来我们考虑相干叠加态： $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle)$, $\Omega = 0$ 的自由原子自发辐射。

Q1) answer:

不发生自发辐射，系统以 $H_{\text{eff}}(\Omega = 0)$ 演化，有

$$|\psi(t)\rangle_{s,NJ} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\Gamma t}}} (|g\rangle + e^{-\frac{\Gamma}{2}t} |e\rangle) \quad (13)$$

当然，在薛定谔表象下，可以写为

$$|\psi(t)\rangle_{s,NJ} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\Gamma t}}} (|g\rangle + e^{-i\omega_{eg}t - \frac{\Gamma}{2}t} |e\rangle)$$

这样的量子轨迹出现的概率还是可以按照上述方法获得，答案是

$$P_{NJ}(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\Gamma T}$$

Q2) answer:

和第一例完全一样:

$$\gamma_c(T) = \frac{\delta P_c}{\delta t} = \langle \psi(T) | C^\dagger C | \psi(T) \rangle_{s,NJ} = \frac{e^{-\Gamma T}}{1 + e^{-\Gamma T}} \Gamma$$

在 T 时刻发生自发辐射，有量子态

$$|\psi(T^+)\rangle_s = |g\rangle$$

且由于是自由原子 ($\Omega = 0$)，接下来

$$|\psi(t > T)\rangle_s = |g\rangle$$

Q3) answer:

和第一例完全一样，激发态的原子只贡献一次光子探测，因此有:

$$\gamma(t) = P_{NJ}(t)\gamma_c(t) = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}\Gamma$$

如图 (3c,d) 所示，在这个叠加态案例中，探测器无输出 (图 (1)) 这个测量结果迫使系统按照非厄密哈密顿量 H_{eff} 演化，其后果是式 (13) 中 $|e\rangle$ 的比例越来越小。然而注意这样的“相干衰减”并不是自发辐射的全部：因为我们发现 $\rho_{ee,s} = \frac{e^{-\Gamma t}}{1+e^{-\Gamma t}}$ 大于 $\rho_{ee} = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}$ 。这样的激发态“盈余”在加入量子坍缩过程后被补充掉。

2. 拉比振荡

接下来我们考虑有激光驱动的二能级原子。

首先在式 (8) 中考虑共振驱动案例： $\Delta = 0, \Omega = 5\Gamma, |\psi(t=0)\rangle = |g\rangle$ (图 (3e,f))

Q1) answer:

不发生自发辐射，系统以 H_{eff} 演化，有

$$|\psi(t)\rangle_{s,NJ} = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{-\frac{\Gamma t}{2}|e\rangle\langle e| + i\frac{\Omega t}{2}\sigma_x} |g\rangle \quad (14)$$

式 (14) 一个简单计算方法是用非厄密哈密顿量 H_{eff} 以及 H_{eff}^\dagger 的本征态对 $|\psi(t)\rangle_s$ 展开，以下仅记 H_{eff} 的本征态为 $|\tilde{g}\rangle, |\tilde{e}\rangle$ ，其中 $|\tilde{g}\rangle$ 的基态成分 $|\langle g|\tilde{g}\rangle|^2$ 更大，那么可以证明，无辐射条件下的 $|\psi(t)\rangle_s$ 态将逐渐弛豫到 $|\tilde{g}\rangle$ 态。

这样的无量子坍缩轨迹存在的概率有多大？也没有一个简单的解。然而可以通过图 (3e,f) 得到一些基本结论：量子跳跃在系统越接近激发态， $|\langle e|\psi(t)\rangle|^2$ 越大时概率越大。对于本案例中，由于 $\Omega \gg \Gamma$ ，因此对于无自发辐射的量子轨迹，原子在基态和激发态各半，因此，对 $T \gg 1/\Gamma$ 来说，有

$$P_{NJ}(T) \approx e^{-\Gamma T/2}$$

Q2) answer:

我们一般有:

$$\gamma_c(T) = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle \psi(T) | C^\dagger C | \psi(T) \rangle_{s,NJ} = \frac{1}{\mathcal{N}} |\langle e | \psi_{s,NJ}(T) \rangle|^2 \Gamma$$

具体表达式比较复杂, 省略。

在 T 时刻发生自发辐射, 有量子态

$$|\psi(T^+)\rangle_s = |g\rangle$$

接下来系统将重复如式 (14) 的 H_{eff} 驱动相干演化, 只是初始时间发生了变化, $t \rightarrow t + T$, 直到再下一次的自发辐射。

如图 (3f) 所示, 对大量随机波函数平均后, ρ_{ee} 形成阻尼振荡, 以 $2/\Gamma$ 弛豫时间趋于 ρ_{ee}^{SS} 平均值 [L10 式 (82)]。

Q3) answer:

这儿, 由于原子持续被激光驱动, $\gamma(t)$ 不再能简单的由 $|\psi\rangle_{s,NJ}$ 分析得出, 只给出一般形式:

$$\gamma(t) = \text{trace}(\rho C^\dagger C) = \rho_{ee}(t) \Gamma$$

E. 随机波函数方法-2

在以上讨论中我们考虑了系统无量子坍缩的概率 $P_{NJ}(T)$ 。事实上, 如果在随机波函数方法中并不要求归一化, 即忽略小节 (II C) 中的步骤 5, 那么 $P_{NJ}(T)$ 很好算:

$$|\psi(T)\rangle_{s,NJ} = e^{-iH_{\text{eff}}T} |\psi(0)\rangle$$

$$P_{NJ}(T) = \langle \psi(T) | \psi(T) \rangle_{s,NJ}$$

这一观测启发了随机波函数方法的第二种形式 (波函数不归一化)

1. 设随机波函数初态 $|\psi(t=0)\rangle_s = |\psi(0)\rangle$ 。

2. 数值获取随机数 $r \in [0, 1]$ 。

3. 以非厄密有效哈密顿量演化无量子坍缩随机波函数:

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle_s = H_{\text{eff}} |\psi(t)\rangle_s$$

$$\text{并计算 } \mathcal{N}^2(t) = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle_s$$

4. 求解 $r = \mathcal{N}^2(t)$, 获得 $t = t_J$, 此为量子坍缩时间。

5. 决定量子坍缩通道: 数值获取随机数 $r_2 \in [0, 1]$, 并计算相对概率 $\delta P_j = \langle \psi(t_J) | C_j^\dagger C_j | \psi(t_J) \rangle_s$, $j = 1, \dots, M$ 。和 $P_{j_c} = \sum_{j=1}^{j_c} \delta P_j / \sum_{j=1}^M \delta P_j$, 并记 $P_0 = 0$: 确定 $r_2 \in [P_{j_c-1}, P_{j_c}]$ 的 j_c 通道: 量子态坍缩于第 j_c 个探测通道, 且这个时候对量子态归一化: $|\psi(t_J^+)\rangle_s = \frac{1}{\mathcal{N}} C_{j_c} |\psi(t_J)\rangle_s$ 。

6. 重复上述 2-5 步, 直到时间 $t = T$ 获得 $|\psi(T)\rangle_s$ 。

7. 重复上述 1-6 步 $s = 1, \dots, N_s$ 次, 然后, 重构密度矩阵:

$$\rho \approx \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} \frac{|\psi(t)\rangle_s \langle \psi(t)|}{\langle \psi(t)|\psi(t)\rangle_s} \quad (15)$$

计算观测量的随机波函数期待以及平均值:

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_s &= \frac{\langle \psi(t)|O|\psi(t)\rangle_s}{\langle \psi(t)|\psi(t)\rangle_s} \\ \langle O \rangle &\equiv \text{trace}(O\rho) \approx \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} \langle O \rangle_s \end{aligned} \quad (16)$$

注意到两种随机波函数方法是等价的。然而相对于对每小步演化进行量子跃迁概率判断的第一种随机波函数方法, 第二种随机波函数方法不仅在数值上, 也在解析推导方面更加方便好用。

F. 弱激发和等效哈密顿量近似

回到二能级原子, 我们再考虑一个式 (8) 下非常重要的激光驱动情形, $\Delta^2 + \Gamma^2/4 \gg |\Omega|^2$, $|\psi(t=0)\rangle = |g\rangle$ (图 (3g,h)), 在这个情况下, 我们可以近似的求出 H_{eff} 的本征态: $|\tilde{g}\rangle = c_g|g\rangle + c_e|e\rangle$, 我们有本征方程:

$$\begin{bmatrix} \Delta - i\Gamma/2 & -\Omega/2 \\ -\Omega^*/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_e \\ c_g \end{bmatrix} = E_{\tilde{g}} \begin{bmatrix} c_e \\ c_g \end{bmatrix} \quad (17)$$

由于 $\Delta^2 + \Gamma^2/4 \gg |\Omega|^2$, 这个方程我们可以用微扰解: 首先考虑 $\Omega = 0$, 那么显然有本征解是 $E_{\tilde{g}}^{(0)} = 0$, $c_g^{(0)} = 1$ 。我们保留 $E_{\tilde{g}} = 0, c_g = 1$, 引入 Ω 到式 (17), 得:

$$c_e = \frac{\Omega/2}{\Delta - i\Gamma/2} \quad (18)$$

类似得, 我们可以由 $c_e^{(0)} = 1$, $E_{\tilde{e}}^{(0)} = \Delta - i\Gamma/2$ 获得 $|\tilde{e}\rangle$ 的表达。

因此有

$$\begin{aligned} |\tilde{g}\rangle &\approx |g\rangle + \frac{\Omega/2}{\Delta - i\Gamma/2} |e\rangle \\ |\tilde{e}\rangle &\approx |e\rangle - \frac{\Omega^*/2}{\Delta - i\Gamma/2} |g\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

注意, 式 (19) 中 $|\tilde{g}\rangle, |\tilde{e}\rangle$ 既不归一, 也不正交, 但是由于 $|\Delta|^2 + \Gamma/4 \gg |\Omega|^2$, 因此误差可控。此外, 注意到本征态的散射率很不相同, 对于“缀饰”基态来说,

$$\begin{aligned} \gamma &= \langle \tilde{g}|C^\dagger C|\tilde{g}\rangle = \frac{|\Omega|^2}{4\Delta^2 + \Gamma^2} \Gamma, \\ \delta &= \langle \tilde{g}|H_0|\tilde{g}\rangle = -\frac{|\Omega|^2}{4\Delta^2 + \Gamma^2} \Delta. \end{aligned} \quad (20)$$

对于“缀饰”激发态来说,

$$\begin{aligned} \gamma_e &= \langle \tilde{e}|C^\dagger C|\tilde{e}\rangle \approx \Gamma, \\ \delta_e &= \langle \tilde{e}|H_0|\tilde{e}\rangle = \Delta + \frac{|\Omega|^2}{4\Delta^2 + \Gamma^2} \Delta. \end{aligned} \quad (21)$$

接下来我们近似 $\gamma_e = \Gamma/2$, $\delta = \delta_e = 0$, 回到 (Q1)(Q2)

(Q1) answer:

在 $O(|\Omega|^2/(4\Delta^2 + \Gamma^2))$ 近似下, 无量子坍塌的随机波函数可以近似写为 (请证明)

$$|\psi\rangle_{s,NJ} \approx e^{-\gamma t/2} |\tilde{g}\rangle - \frac{\Omega/2}{\Delta - i\Gamma/2} e^{-i\Delta t - \Gamma t/2} |\tilde{e}\rangle \quad (22)$$

和前面自由原子相干叠加态类似, 这儿即使没有自发辐射, 原子也渐渐演化到相对稳定的 $|\tilde{g}\rangle$ 态。在 $t \in [0, T]$ 内, 这样的无辐射随机波函数的出现概率是

$$P_{NJ}(T) \approx e^{-\gamma T}$$

(Q2) answer:

由式 (22),

$$\begin{aligned} \gamma_c(T) &= \frac{1}{P_{NJ}} \langle \psi | C^\dagger C | \psi \rangle_{s,NJ} \\ &= \gamma \end{aligned} \quad (23)$$

注意, 上式我们在计算条件自发辐射时, 由于应用第二种随机波函数方法, 需要对波函数归一化。

此外, 和第一例完全一样: 在 T 时刻发生自发辐射, 有量子态

$$|\psi(T^+)\rangle_s = |g\rangle$$

接下来系统将重复如式 (14) 的 H_{eff} 驱动相干演化, 只是初始时间发生了变化, $t \rightarrow t + T$, 直到再下一次的自发辐射。

如图 (3h) 所示, 对大量随机波函数平均后, ρ_{ee} 形成阻尼振荡, 以 $\tau_2 \approx 2/\Gamma$ 弛豫时间趋于 $\rho_{ee}^{SS} = \frac{|\Omega|^2}{4\Delta^2 + \Gamma^2}$ 的平均值。注意到

$$\tau_2 \ll 1/\gamma$$

因此, 绝大部分时间, 系统实际上处于由 H_{eff} 决定的本征态 $|\tilde{g}\rangle$ 。我们因此可以近似 $|\psi(t)\rangle = |\tilde{g}\rangle$, 用来计算各类观测量 – 这种忽略量子坍塌过程, 仅考虑 H_{eff} 演化的计算方法, 是等效哈密顿量近似。在线性和非线性光学领域被广泛应用。接下来仅以二能级原子的线性极化率为例予以介绍, 在下节课会介绍非线性光学极化率计算。

(Q3) answer: 由上述分析可知, 在弱激发极限下, 系统在绝大部分时间处于条件量子态 $|\psi(t)\rangle_{NJ} \approx |\tilde{g}\rangle$, 因此我们可以近似: $\rho = |\tilde{g}\rangle\langle\tilde{g}|$, 因此由式 (20) 有

$$\gamma(t) \approx \gamma$$

1. 原子的线性极化率

从式 (19), 并由上述图 (3g,h) 相关讨论, 我们知道在 $\Delta^2 + \Gamma^2/4 \gg |\Omega|^2$ 的弱条件下, 由于自发辐射及其后拉比弛豫过程占系统演化很小的一部分, 因此二能级原子的量子态可以近似为 $|\psi\rangle = |\tilde{g}\rangle$, 我们可以用这个性质来计算原子的偶极矩 (和 [L8 式 (82)] 对比):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d} \rangle &= \mathbf{d}_{eg} \langle \tilde{g} | g \rangle \langle e | \tilde{g} \rangle + c.c. \\ &= -\mathbf{d}_{eg} \frac{\Omega/2}{\Delta - i\Gamma/2} + c.c. \\ &= \alpha \langle \mathbf{E}^+ \rangle + c.c. \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\mathbf{d}_{eg}\mathbf{d}_{ge}/2\hbar}{\Delta - i\Gamma/2} \\ &= \varepsilon_0 \frac{3\lambda^3}{4\pi^2} \frac{\Gamma/2}{\Delta - i\Gamma/2}\end{aligned}\quad (25)$$

这儿我们运用了 $\Gamma = \frac{|\mathbf{d}_{eg}|^2\omega_{eg}^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar c^3}$, 并在二能级原子构型下忽略的 \mathbf{d}_{eg} 的矢量性: $\mathbf{d}_{eg}\mathbf{d}_{ge} \rightarrow |\mathbf{d}_{eg}|^2\mathbf{1}$ 。一般情况下, α 是一个二阶张量 (并矢)。

式 (25) 值得讨论:

- 1) 共振激发下原子的线性响应是正虚数, 大小相当于复折射率为 1, 半径为 $\lambda/2\pi$ 的球体的 6π 倍。
- 2) 失谐激发下, $\Delta = \omega_{eg} - \omega \gg \Gamma$ ("红失谐"), 极化率正比于 Γ/Δ 为正实数
- 3) 失谐激发下, $\Delta = \omega_{eg} - \omega \ll \Gamma$ ("蓝失谐"), 极化率正比于 Γ/Δ 为负实数
- 4) 对于密度为 ρ 的原子系综, 如果密度不算太大, 可以简单的算出负折射率: $n = \sqrt{1 + \rho\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\rho\alpha$, 我么发现 α_r 贡献于入射光的相移, α_i 贡献于入射光的吸收。

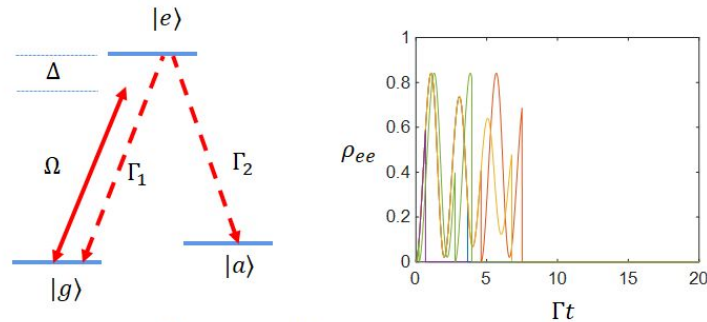
G. 多能级原子推广

1. $J_g \leftrightarrow J_e$

和图 (2b) 类似, $J_g = 1/2, J_e = 1/2, 3/2$ 已经讲了。一般情况下, 随机波函数的演化牵涉到光频移, 自发拉曼散射, 光学泵浦效应等有趣过程, 其深刻理解是原子磁强计, 激光冷却等系列技术的理论基础, 下节课涉及一些。

2. 单模光场驱动下三能级原子的暗态

我们考虑如图 (4) 的三能级系统, 例如, 这样的系统可以由 L8 的 $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$ 系统分



$$H_{eff} = \hbar \left(\Delta - \frac{i\Gamma}{2} \right) |e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega}{2} |e\rangle\langle g| + h.c.$$

$$C_1 = \sqrt{\Gamma_1}|g\rangle\langle e|, C_2 = \sqrt{\Gamma_2}|a\rangle\langle e|$$

图 4. Evolution of a Λ -system to dark state $|a\rangle$ via quantum jump.

解出来。注意激发态的辐射率 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 。

我们考虑系统的初态是 $|\psi(t=0)\rangle = |g\rangle$, 还是考虑 (Q1-3)。

Q1) answer:

不发生自发辐射，系统以 H_{eff} 演化，有类似于图 (3g) 的拉比振荡。对于 $\Omega \ll \Delta$ 来说，和式 (22) 类似，我们有

$$|\psi\rangle_{s,NJ} \approx e^{-\gamma t/2} |\tilde{g}\rangle - \frac{\Omega/2}{\Delta - i\Gamma/2} e^{-i\Delta t - \Gamma t/2} |\tilde{e}\rangle \quad (26)$$

其中 $\gamma = \tilde{g}|C_1^\dagger C_1 + C_2^\dagger C_2|\tilde{g}\rangle = \Gamma|\Omega|^2/(4\Delta^2 + \Gamma^2)$ 是 $|\tilde{g}\rangle$ 态下的散射率。因此仍然有

$$P_{NJ}(T) \approx e^{-\gamma T}$$

Q2) answer:

$$\gamma_c(T) = \frac{1}{P_{NJ}} \langle \psi(T) | C_1^\dagger C_1 + C_2^\dagger C_2 | \psi(T) \rangle_{s,NJ} = \gamma_1 + \gamma_2$$

其中

$$\gamma_{1,2} = \Gamma_{1,2} |\Omega|^2 / (4\Delta^2 + \Gamma^2)$$

在 T 时刻发生自发辐射，仍然有两种情况，分别为：

概率 $P_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$ ：

$$|\psi(T^+)\rangle_s = C_1 |\psi\rangle_s \rightarrow |g\rangle$$

接下来系统将重复如式 (14) 的 H_{eff} 驱动相干演化，只是初始时间发生了变化， $t \rightarrow t + T$ ，直到再下一次的自发辐射。

概率 $P_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ ：

$$|\psi(T^+)\rangle_s = C_2 |\psi\rangle_s \rightarrow |a\rangle$$

由于 $|a\rangle$ 态并不和激光场耦合， $H_{\text{eff}}|a\rangle = 0$ ，因此系统“停止演化”，常被称为“暗态”。这种从“亮态” $|g\rangle$ 到“暗态” $|a\rangle$ 的激发和自发辐射过程，属于一类“光学泵浦”过程。

随机波函数下 ρ_{ee} 的特征见图 (4b)。

Q3) answer:

以上我们知道， $|\tilde{g}\rangle$ 在量子坍缩后有 P_2 的概率衰退到 $|a\rangle$ ，不再演化，因此系统密度矩阵可以近似为：

$$\rho(t) \approx e^{-\gamma_2 t} |\tilde{g}\rangle \langle \tilde{g}| + (1 - e^{-\gamma_2 t}) |a\rangle \langle a|$$

我们因此有：

$$\gamma_{1,2}(t) = \text{trace}(\rho C_{1,2}^\dagger C_{1,2}) = \gamma_{1,2} e^{-\gamma_2 t}$$

3. 量子拍

我们考虑如图 (5) 中间的原子构型，由于有两个激发态 $|e_{1,2}\rangle$ ，辐射光子的能量 $\omega_{1,2}$ 并不相同。在本章第一节已经论述，这种情况下，系统和热库的作用可能在 $\delta t < 1/\Delta\omega_{1,2}$ 时间尺度上存在相干性。本小节考虑这个效应。

我们考虑如图 (5)a 所示的角度分辨光子探测，由于原子和同一个光场模式相互作用，相应的量子坍缩算符需要写成

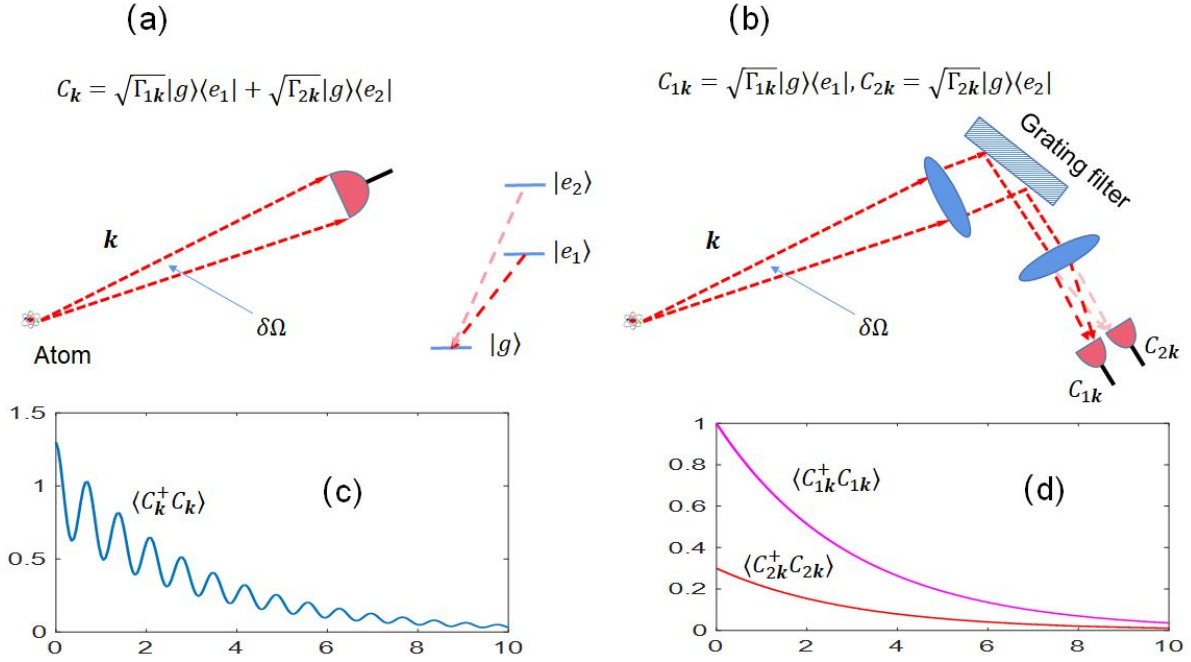


图 5. (a,c): Time-resolved detection of quantum beat. (b,d): frequency-resolved detection without quantum beat.

$$C_{\mathbf{k}} = \sqrt{\Gamma_{1\mathbf{k}}}|g\rangle\langle e_1| + \sqrt{\Gamma_{2\mathbf{k}}}|g\rangle\langle e_2| \quad (27)$$

这儿，我们为简单起见对于点状原子省略了光子反冲相因子。

考虑原子初态是 $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |e_2\rangle)$ ，接下来原子不发生自发辐射的条件量子态是（不归一化）

$$|\psi(t)\rangle_{s,NJ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega_1 t - \frac{\Gamma_1}{2}t}|e_1\rangle + e^{-i\omega_2 t - \frac{\Gamma_2}{2}t}|e_2\rangle)$$

因此由随机波函数方法-2，我们知道不自发辐射的概率是

$$P_{NJ}(t) = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \frac{e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t}}{2}$$

我们考虑在 $\hat{\mathbf{k}}$ 方向, $[t, t + \delta t]$ 期间探测到光子的概率，

$$\langle C_{\mathbf{k}}^\dagger C_{\mathbf{k}} \rangle \delta t = \text{trace}(\rho C_{\mathbf{k}}^\dagger C_{\mathbf{k}}) \delta t$$

由于是自由演化，因此原子自发辐射只能有一次，也即 $|\psi(t)\rangle_{s,NJ}$ 态可用来代表所有 t 时刻可以产生自发辐射的随机波函数。我们按照式 (16)，有 \mathbf{k} 方向的荧光计数率：

$$\begin{aligned} i(t) = \langle C_{\mathbf{k}}^\dagger C_{\mathbf{k}} \rangle &= P_{NJ}(t) \frac{\langle \psi(t) | C_{\mathbf{k}}^\dagger C_{\mathbf{k}} | \psi(t) \rangle_{s,NJ}}{P_{NJ}(t)} \\ &= \frac{1}{2}\Gamma_{1\mathbf{k}}e^{-\Gamma_1 t} + \frac{1}{2}\Gamma_{2\mathbf{k}}e^{-\Gamma_2 t} + \sqrt{\Gamma_{1\mathbf{k}}\Gamma_{2\mathbf{k}}}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t}\cos((\omega_1 - \omega_2)t) \end{aligned} \quad (28)$$

结果如图 (5c) 所示。这种自发辐射的相干振荡被称为”量子拍“(Quantum beat)，其物理根源是不同跃迁和环境的相互作用共享相同的光场模式 $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ 。如果我们考虑大角度积分探测，甚至如图 (2b) 的

4π 积分探测，则由于两个跃迁矩阵元 $g_{j,\mathbf{k}}$ 的偏振依赖性不同，量子拍常常会被平均削弱。特别是由偶极跃迁的对称性，在同一个轨道跃迁的超精细结构中常常平均到零。

有同学可能会问，那么，完全不同频率和颜色的 $\omega_{1,2}$ 光子，难道是不可区分的吗？答案是可以区分，但是需要时间。我们可以考虑如图 (5b) 的假想测量装置：由光栅分光计将 ω_1, ω_2 光子分开探测，相应的，我们必须在 \mathbf{k} 方向引入两种量子坍缩算符：

$$\begin{aligned} C_{1\mathbf{k}} &= \sqrt{\Gamma_{1\mathbf{k}}}|g\rangle\langle e_1| \\ C_{2\mathbf{k}} &= \sqrt{\Gamma_{2\mathbf{k}}}|g\rangle\langle e_2| \end{aligned} \quad (29)$$

两个探测器的计数率分别是：

$$\begin{aligned} \langle C_{1\mathbf{k}}^\dagger C_{1\mathbf{k}} \rangle &= \frac{1}{2}\Gamma_{1\mathbf{k}}e^{-\Gamma_1 t} \\ \langle C_{2\mathbf{k}}^\dagger C_{2\mathbf{k}} \rangle &= \frac{1}{2}\Gamma_{2\mathbf{k}}e^{-\Gamma_2 t} \end{aligned} \quad (30)$$

结果如图 (5d) 所示。

这两个结果有矛盾吗？没有。运用第二种”探测方法“的随机波函数演化是以假象的”频率分辨探测“为代价的， $\Delta\omega_{1,2}$ 的频率分辨性要求系统的演化时间解析度 δt 不能小于 $1/\Delta\omega_{1,2}$ 。

H. 定向超辐射

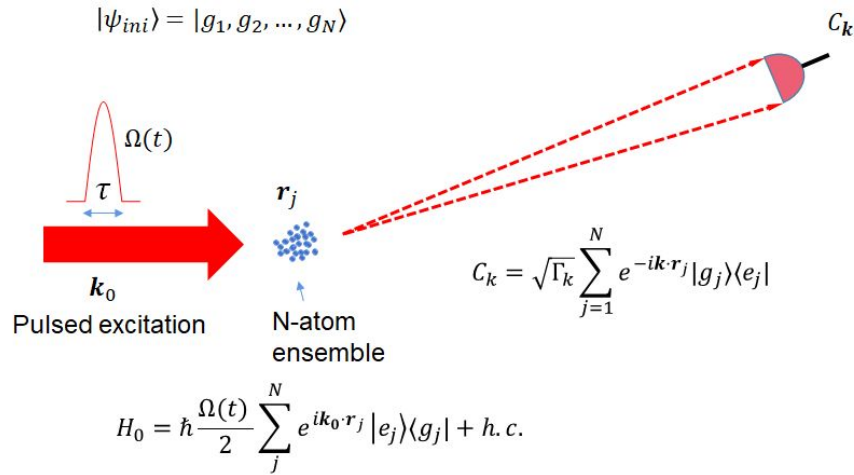


图 6. Coherent excitation of a 2-level atomic ensemble is followed by coherent forward emission, as can be monitored in the far-field.

我们考察图 (6) 的多原子体系。多原子系统处于基态，经过共振脉冲光激发后，原子态可以写为：

$$|\psi(\tau)\rangle = \prod (\cos(\frac{\theta}{2})|g_j\rangle + i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j}|e_j\rangle). \quad (31)$$

为方便起见，这里我们考虑”脉冲面积“ $\theta = \int \Omega dt \ll 1$ ，且脉冲时长短， $\tau \ll 1/\Gamma$ ， Γ 是原子激发态的线宽。

接下来多原子体系会自发辐射。由于进行方向分辨远场监控时，无法区分收集到的光子是原子 $j = 1, \dots, N$ 中的哪个发出。因此可以引入集体坍缩算符：

$$C_{\mathbf{k}} = \sqrt{\Gamma_{\mathbf{k}}} \sum_j^N e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} |g_j\rangle \langle e_j| \quad (32)$$

其中 $\Gamma_{\mathbf{k}} \approx \frac{\delta\Omega}{4\pi} \Gamma$ ， $\delta\Omega$ 是探测器的立体角。

我们计算式 (31) 多原子态下的初始量子坍缩率 (平均光子计数率)：

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k}}(\tau) &= \langle \psi(\tau) | C_{\mathbf{k}}^\dagger C_{\mathbf{k}} | \psi(\tau) \rangle \\ &= \sum_j \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Gamma_{\mathbf{k}} + \sum_{j \neq l} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\cdot(\mathbf{r}_l-\mathbf{r}_j)} \Gamma_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (33)$$

对于 $\theta \ll 1$ ，令 $\gamma = \sin^2(\frac{\theta}{2})\Gamma$ 为单原子辐射率，并定义波矢失配 $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ ，我们有

$$\gamma_{\mathbf{k}}(\tau) \approx (N + N(N-1)\varrho(\Delta\mathbf{k})) \frac{\delta\Omega}{4\pi} \gamma \quad (34)$$

其中 $\varrho(\Delta\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}) e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 是归一化原子密度 $\varrho(\mathbf{r}) = \frac{1}{N} \sum_j^N \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ 的傅里叶变换。

如果 $\Delta\mathbf{k} = 0$ ，那么 $\varrho(\Delta\mathbf{k} = 0) = 1$ ，对于 $N \gg 1$ ，式 (33) 括号中的第二项将提供远大于第一项的贡献 - 这个 $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0$ 的相干辐射，又叫做”超辐射“，实际上是相干光学的基础，下节课非线性倍频技术中会再次遇到。

由于共振偶极相互作用（一个原子的辐射光子会被另一个原子吸收），该多原子体系辐射的长时间动力学并不容易写出，一个有趣的结论是， \mathbf{k}_0 激发形成的”自旋波“是该多体体系非厄密哈密顿量 H_{eff} 的近似本征态，其线宽 Γ_N 大于 Γ 。

III. 总结：量子坍缩算符的构造

1) 对位于 \mathbf{r} 处的原子，从系统 + 环境哈密顿量出发。考察系统 $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ 跃迁。并按照思想实验，构造环境单光子态 $\mathcal{E}_j(\mathbf{r})$ (可能牵涉到光场模式的线性变换)，计算单光子耦合拉比频率 $g_j \propto \mathcal{E}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_{eg}$ 。

2) 预设单光子探测率 $\Gamma_j \propto |g_j|^2$ 作为坍缩率。

3) 坍缩算符 $C_j = \sqrt{\Gamma_j} \frac{g_j}{|g_j|} |g\rangle \langle e|$ 。

4) 自发辐射率的归一化： $\sum_j C_j^\dagger C_j = \Gamma_{e \rightarrow g} |e\rangle \langle e|$ 。

5) 激发态的自然线宽：

$$\Gamma_e = \sum_g \Gamma_{e \rightarrow g}$$

6) 多能级原子的自发辐射：不可分辨光子的探测对应多能级退激发，大致可写为：

$$C_j = \sqrt{\Gamma_j} \frac{g_j}{|g_j|} \sum_{\mu} c_{j,\mu} |g_{\mu}\rangle \langle e_{\mu}|$$

7) 不同频率光子的可分辨性。

8) 不同偏振光子的可分辨性。

===== Lecture 12 =====

IV. 探测器监控的单模腔场

A. 透射损耗

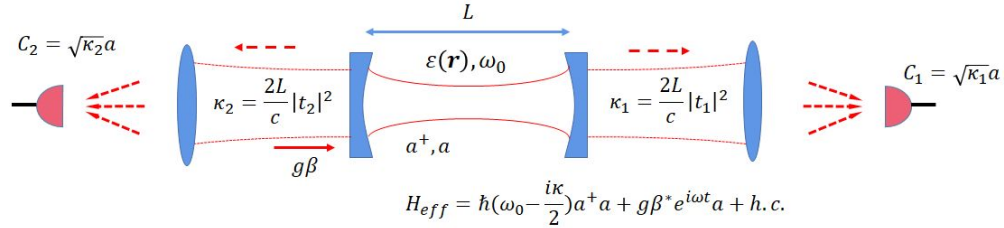


图 7. Schematic setup for monitoring a coherently driven cavity field.

首先将我们在 L8 中推导的腔场漏光模型推广到更加常见的 Fabry-Perot 腔场形式：对于完美腔场 + 点状粒子，我们得到 (L10 式 (25))

$$\kappa = \frac{\alpha^2 \omega_1^4}{4\pi \epsilon_0^2 c^3} |f_1(0)|^2$$

现考虑没有点状粒子散射，而是腔场的端镜是理想分束器，透射率为 $|t_{1,2}|^2 \ll |r_{1,2}|^2$ ，且 $|t_{1,2}|^2 + |r_{1,2}|^2 = 1$ 。这个情况下，容易证明，

$$\begin{aligned} \kappa_{1,2} &= \frac{c}{2L} |t_{1,2}|^2 \\ \kappa &= \kappa_1 + \kappa_2 \end{aligned} \quad (35)$$

其中 κ 是腔场的线宽。

如图 (7)，对应探测器 $D_{1,2}$ ，我们引入量子坍缩算符：

$$C_{1,2} = \sqrt{\kappa_{1,2}} a$$

并不失一般性，考虑腔场从左侧腔镜入射相干驱动，腔场的有效哈密顿量可以写为：

$$H_{\text{eff}} = \hbar(\omega_0 - \frac{i\kappa}{2}) a^\dagger a + g\beta^* e^{i\omega t} a + h.c. \quad (36)$$

这儿我们做了一个”混合绘景“，驱动光模式在海森堡表象，腔场在薛定谔表象。我们也可以写道相互作用表象（旋转波变换）：

$$H_{\text{eff}} = \hbar\left(\Delta - \frac{i\kappa}{2}\right)a^\dagger a + g\beta^* a + h.c. \quad (37)$$

其中 $\Delta = \omega_0 - \omega$ 是驱动光的失谐量。

B. 相干透射驱动光场的表达

如图 (7), 如何将式 (37) 中的相干态振幅 β 和入射光场振幅联系起来呢? 考虑入射激光功率为 P , 可以证明 (见 Steck Note Eq. (12.40))

$$|g\beta| = \sqrt{\frac{P\kappa_2}{\hbar\omega_0}} \quad (38)$$

式 (38) 实际应用很方便, 注意这里假设驱动光场的模式和漏光模式完全匹配。

C. 单模腔场的随机波函数方法

D. Fock 态和相干态

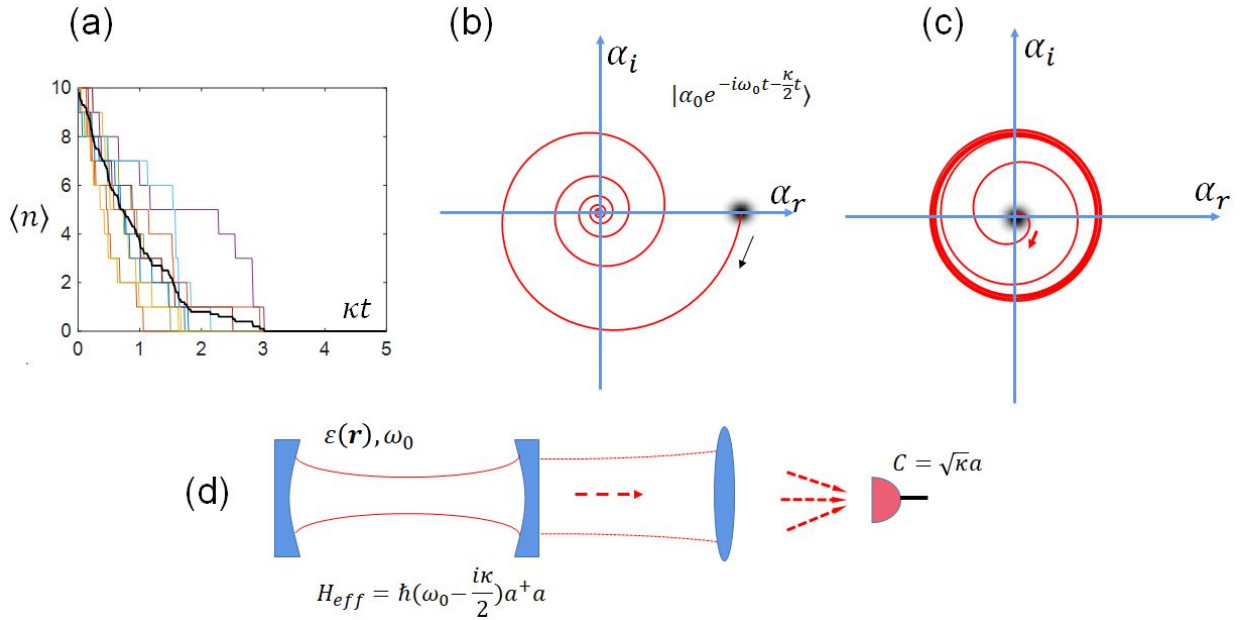


图 8. Schematic setup for realizing stochastic function of a coherently driven cavity field.

案例一: Fock 态 $|\psi(t=0)\rangle = |N\rangle$ 自由光场, $\beta = 0$ 。

(Q1) answer:

$$\begin{aligned} |\psi(T)\rangle_{s,NJ} &= e^{(-i\Delta - \frac{\kappa}{2})a^\dagger a T} |N\rangle \\ &= e^{-iN\Delta T - N\kappa/2T} |N\rangle \end{aligned} \quad (39)$$

注意，这儿相因子有“失谐量” Δ ，是因为我们约定了腔场频率 ω_0 以驱动光场频率 ω 为参考。
这样无量子跳跃的随机偶函数存在的概率是

$$P_{NJ}(T) = e^{-N\kappa T}$$

(Q2) answer: 按照“不归一化波函数”

$$\gamma_c(T) = \frac{\langle \psi(T) | C^\dagger C | \psi(T) \rangle_{s,NJ}}{\langle \psi(T) | \psi(T) \rangle_{s,NJ}} = N\kappa$$

或者，

$$\gamma_c(T) = \frac{1}{P_{NJ}} \dot{P}_{NJ}(T) = N\kappa$$

$$|\psi(T^+)\rangle_s = a|N\rangle \rightarrow |N-1\rangle$$

注意到接下来随机波函数以完全正交于初态 $|N\rangle$ 的 $|N-1\rangle$ 态演化。因此，光子数态在光损失面前是非常脆弱的。

(Q3) 平均光子计数率：

$$\gamma(t) = \text{trace}(\rho C^\dagger C) = \bar{n}(t)\kappa = N\kappa e^{-\kappa t}$$

注意，这儿我们应用了 t 时刻的腔场平均光子数 $\bar{n}(t) = Ne^{-\kappa t}$

这个结论也可以由随机波函数图像得到，一个相对方便的方式是运用海森堡-朗之万方程：

$$\dot{a} = -\kappa/2a - i\hat{F}$$

$$\dot{a}^\dagger = -\kappa/2a^\dagger + i\hat{F}^\dagger$$

我们因此有：

$$\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle = -\kappa \langle a^\dagger a \rangle - i \langle a^\dagger \hat{F} - \hat{F}^\dagger a \rangle$$

注意第二部分平均值为零，因此：

$$\frac{d}{dt} \langle n(t) \rangle = -\kappa \langle n(t) \rangle$$

光子数平均值指数衰减，形象直观。

案例二：相干态 $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle$ 自由光场， $\beta = 0$ 。

(Q1) answer: 我们将相干态写出来：

$$\begin{aligned} |\psi(T)\rangle_{s,NJ} &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{-i\Delta - \frac{\kappa}{2} T} a^\dagger \alpha T e^{\alpha a^\dagger |V\rangle} \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\frac{|\alpha|^2}{2} e^{-\kappa T}} |\alpha e^{-i\Delta T - \kappa T/2}\rangle \end{aligned} \quad (40)$$

注意，这儿有“失谐量” Δ ，是因为我们约定了腔场频率 ω_0 以驱动光场频率 ω 为参考。

$$P_{NJ}(T) = e^{-|\alpha|^2(1-e^{-\kappa T})}$$

(Q2,Q3) answer:

$$|\psi(T^+)\rangle_s = a|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle$$

这个很奇怪：量子坍缩不引起随机波函数的任何变化！随机波函数总是纯态 $|\alpha(t)\rangle$ – 这个和我们主方程的推导一致 [L10 式 (57)]。和 L8 线性光学分析类似，我们再次发现，相干态在光损失面前是非常“鲁棒”的。

最后，由于随机波函数是纯态，我们有：

$$\gamma(t) = \langle C^\dagger C \rangle = \langle \alpha(t) | C^\dagger C | \alpha(t) \rangle = |\alpha|^2 e^{-\kappa t \kappa}$$

E. 猫态的退相干

我们考察 $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ 自由光场, $|\alpha| \gg 1, \beta = 0$ 。

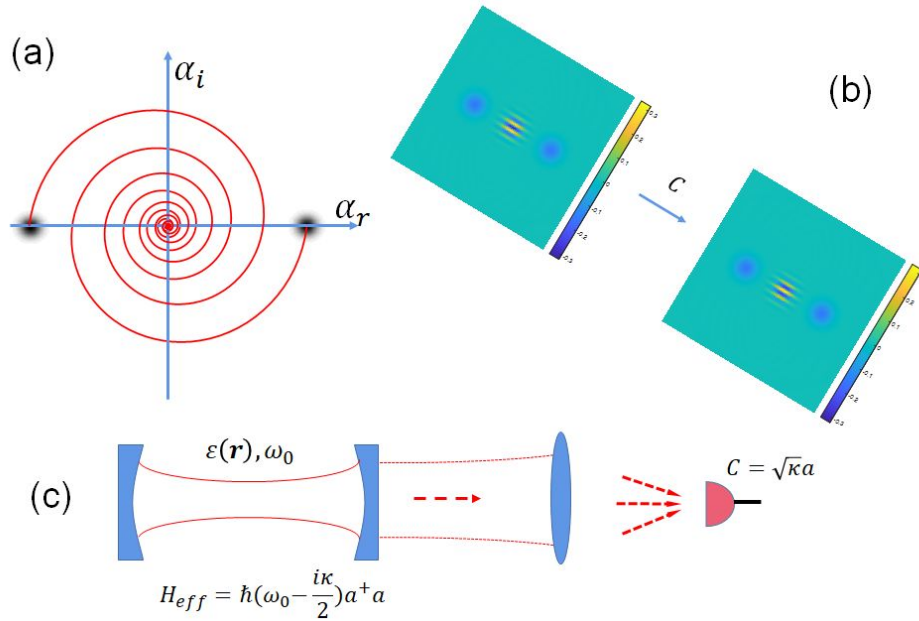


图 9. .

(Q1) answer: 类似于式 (40)，我们有

$$|\psi(T)\rangle_{s,NJ} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\kappa t} (|\alpha e^{-i\Delta t - \kappa t/2}\rangle + |-\alpha e^{-i\Delta t - \kappa t/2}\rangle) \quad (41)$$

并且，和和相干态一样： $P_{NJ}(T) = e^{-|\alpha|^2(1-e^{-\kappa t})}$

(Q2,Q3) answer:

$$|\psi(T^+)\rangle_s = a(|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle) \rightarrow (|\alpha(t)\rangle - |-\alpha(t)\rangle)$$

由于随机波函数总是 $|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$ 的状态，且 $|\alpha| \gg 1$ ，我们有：

$$\gamma(t) = \langle C^\dagger C \rangle = \langle \alpha(t) | C^\dagger C | \alpha(t) \rangle = |\alpha|^2 e^{-\kappa t \kappa}$$

但是，注意到：

$$|(\langle \alpha(t)| + \langle -\alpha(t)|)(|\alpha(t)\rangle - |-\alpha(t)\rangle)|^2 \sim e^{-8|\alpha(t)|^2}$$

因此，对于 $|\alpha|^2 \gg 1$ 的宏观“猫态”，不仅量子坍缩率 $\Gamma|\alpha|^2$ 很大，且一次量子坍缩就将随机量子波函数置于几乎完全垂直的状态。这和相干态对于光子数损失的“极端鲁棒性”形成了鲜明的对比。因为相干态 $|\alpha\rangle$ 的上述鲁棒性，可以被认为是经典态，而“猫态”则是经典态的量子叠加。

如果这个光子并没有被人类探测到，那么从人类的角度，相干性消失，系统退化成混合态：

$$\rho \rightarrow \frac{1}{2}(|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)| + |-\alpha(t)\rangle\langle-\alpha(t)|)$$

好了，系统演化难道需要人类观测吗？

F. 观测会影响量子态演化吗？

不观测 – 随机波函数随机

观测 – 人类获得随机波函数信息

V. 观测导致的局域化

从 L1 正则量子化开始，并没有理由认为量子力学只能描述微观粒子，反而似乎完全应该能用于描述宏观现象。

那么，为何我们没有发现过猫在“死”和“活”之间振荡的量子现象？甚至从来没有出现过 A 处和 B 处叠加的猫？猫的质心波函数的宽度应该是多大？本小节从观测的角度展示宏观量子态的消相干机制，为此，我们首先引入原子的外态波函数。

A. 引入原子的外态波函数

由完备关系：

$$|\psi\rangle = (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) \int d^3\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\psi\rangle$$

我们可以将二能级原子的整体波函数写为：

$$|\psi\rangle = \int d^3\mathbf{r} (\psi_g(\mathbf{r})|\mathbf{r}\rangle|g\rangle + \psi_e(\mathbf{r})|\mathbf{r}\rangle|e\rangle) \quad (42)$$

其中 $\psi_{g,e}(\mathbf{r})$ 是基态和激发态原子的空间波函数。式 (42) 常被称为多能级原子的旋量物质波描述方法。

有了原子的空间波函数后，式 (6) 中从激光驱动项到真空耦合项都必须加上原子的位置 \mathbf{r} ：

$$\Omega \rightarrow \Omega e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$$

$$g_{\mathbf{k}} \rightarrow g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

此外，哈密顿量中我们需要加入质心动能项： $H_{\text{eff}} \rightarrow H_{\text{eff}} + \frac{P^2}{2M}$ ，其中 M 为原子质量。在下面的分析中，我们简化问题，考虑大质量极限， $M \rightarrow \infty$ ，因此动能项不重要。

B. 方向分辨探测和光子反冲

我们考察如图 (10) 的实验装置, 脉冲光时间 τ , 频率 $\omega = \omega_{eg}$ 和二能级原子共振, 脉冲“面积”为 $\theta = \int_0^\tau \Omega dt$ 。我们考虑短脉冲 $\tau \ll 1/\Gamma$, 因此激发期间的自发辐射可以被忽略。此外, 脉冲间隔 $T_{\text{rep}} \gg 1/\Gamma$, 因此原子被一个脉冲激发后, 有足够的时间自发辐射到基态。在如图 (10) 的原子初态下, 单脉冲激发后原子的波函数可以写为:

$$|\psi(\tau)\rangle = \int d^3\mathbf{r} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi(\mathbf{r})|\mathbf{r}\rangle|g\rangle + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\psi(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle|e\rangle \right) \quad (43)$$

接下来, 在 $t \in [\tau, T_{\text{rep}}]$, 由于 $T_{\text{rep}} \gg 1/\Gamma$, 我们知道不发生量子坍缩, 系统相干演化的概率是 (为什么):

$$P_{NJ} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

且量子态完全没变化 (见图 (3c,d))

$$|\psi(T_{\text{rep}})\rangle_{s,NJ} = \int d^3\mathbf{r}\psi(\mathbf{r})|\mathbf{r}\rangle|g\rangle$$

发生量子坍缩的概率是:

$$\delta P = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

其中 \mathbf{k} 方向探测到光子的概率 $\delta P_{\mathbf{k}} \approx \frac{\delta\Omega}{4\pi}\delta P$,

$$|\psi(T_{\text{rep}})\rangle_{s,\mathbf{k}} = \int d^3\mathbf{r}\psi(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle|g\rangle \quad (44)$$

式 (44) 的含义非常明显: 由于自发辐射, 原子质心运动的动量有了 $\hbar(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$ 的改变。其中 $\hbar\mathbf{k}_0$ 由吸收造成, 方向确定。 $\hbar\mathbf{k}$ 是自发辐射造成, 方向随机。

我们可以得到辐射压力:

$$\mathbf{F} = \frac{\langle\Delta P\rangle}{T_{\text{rep}}} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\hbar\mathbf{k}_0}{T_{\text{rep}}} \quad (45)$$

而动量空间的随机行走造成动量扩散系数:

$$D \equiv \frac{d}{dt}(\langle\Delta P^2\rangle - \langle\Delta P\rangle^2) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\hbar^2 k_0^2}{T_{\text{rep}}} \quad (46)$$

然而需要注意的是, 上述波函数的模平方空间 $|\psi(\mathbf{r})|^2$ 并没有发生变化, 以下我们将看到, 这个特点并不是由于我们限制了 $M \rightarrow \infty$ 。

C. 海森堡显微镜

不同于图 (10) 中的角分辨探测, 我们当然可以考虑图 (11) 中的成像探测, 相应的量子坍缩算符可以写为:

$$C_j = \sqrt{\Gamma_M} f_{M_j}(\mathbf{r})|g\rangle\langle e| \quad (47)$$

按照第 (III) 节的总结, 这里我们有

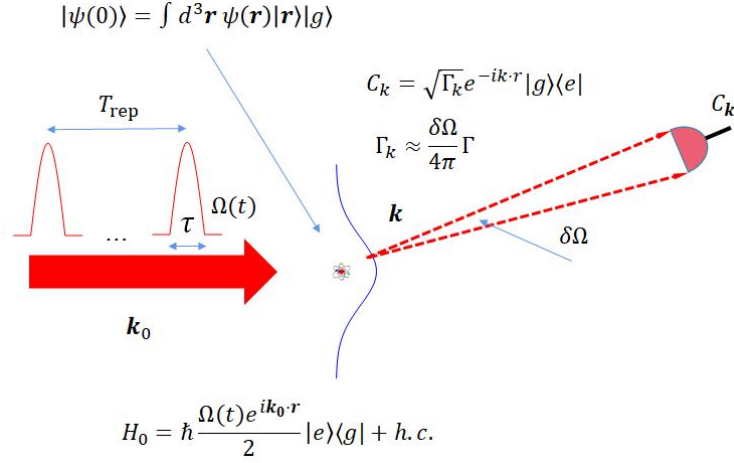


图 10. Photon recoil effect. Detection of a photon by detector $D_{\mathbf{k}}$ induces a $C_{\mathbf{k}}$ quantum jump at time t , the atomic wavefunction collapses to $|\psi(t^+)\rangle_{s,\mathbf{k}} = \int d^3\mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} |\mathbf{r}\rangle |g\rangle$.

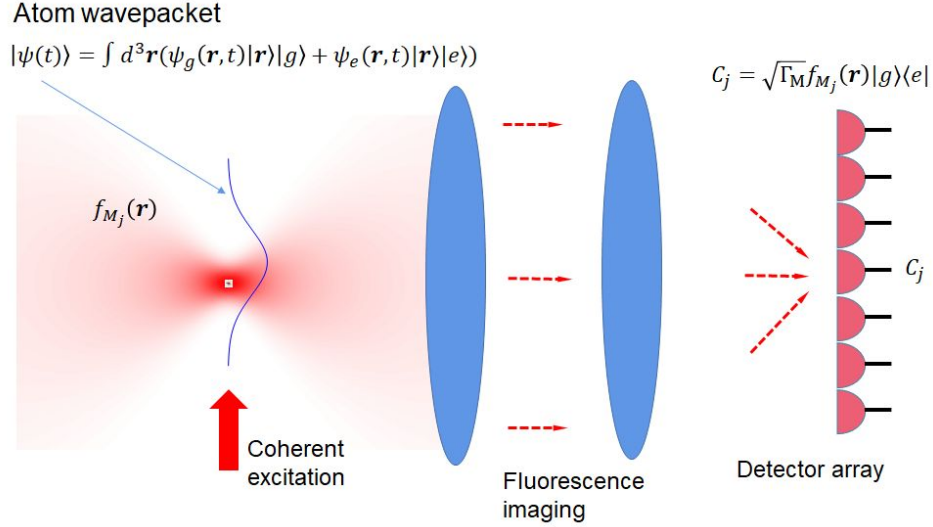


图 11. Heisenberg Microscope: Detection of a photon by detector D_j induces a C_j quantum jump at time t , the atomic wavefunction collapses to $|\psi(t^+)\rangle_s = \int d^3\mathbf{r} \psi_e(\mathbf{r}, t^-) f_{M_j}(\mathbf{r}) |\mathbf{r}\rangle |g\rangle$, that is, the spinor $(\psi_g, \psi_e) \rightarrow (\psi_e f_{M_j}(\mathbf{r}), 0)$ by the collapse.

$$\Gamma_M f_{M_j}^2(\mathbf{r}) \propto |\mathcal{E}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_{eg}|^2$$

且如果我们考虑成像系统收集了 4π 立体角，那么有

$$\sum_j \Gamma_M f_{M_j}^2(\mathbf{r}) = \Gamma_e$$

其中有分辨率极限单模光场监控下的最大量子坍塌率（探测率）

$$\Gamma_M \sim \text{NA}^2 \Gamma_e$$

其中 $NA = \sin\theta$ 是成像物镜的张角，而相对坍缩包络函数可以写为

$$f_{M_j}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_j(\mathbf{r}) / (|\mathcal{E}_j|)_{\max}$$

接下来见图 (11) 注解， C_j "click" 对应于旋量波函数的空间选择：

$$(\psi_g, \psi_e) \rightarrow (\psi_e f_{M_j}(\mathbf{r}), 0)$$

可以想象，原先空间非局域的原子波函数在大量光散射探测过程中会被定位到

$$\Delta x \approx \lambda/NA$$

的横向尺度，以及

$$\Delta z \approx \lambda/NA^2$$

的纵向尺度。

当然，如果我们的成像系统遍布 4π ，那么原子可以被定位到

$$\Delta r = \lambda/2$$

的三维区域。

以上的空间波函数局域化均对应于动量空间原子波函数分布的不确定性增加，是为海森堡显微镜。需要注意的是，波函数的空间局域化，是相对的，即原子相对于成像系统位置的局域化。假如我们成像系统自己也是由量子力学来描述，有自己的波函数，那么如何？

D. 双原子位置的相对局域化及启示

考虑图 (12) 所示的双原子系统，原子初态为：

$$|\psi(0)\rangle = \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\rangle |g_1, g_2\rangle \quad (48)$$

其中 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ 为二体波函数。我们考虑弱脉冲， $\theta \ll 1$ ，因此脉冲激发后原子仍然大概率在基态，可以写为：

$$|\psi(\tau)\rangle = \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\rangle \left(|g_1, g_2\rangle + i \frac{\theta e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1}}{2} |e_1, g_2\rangle + i \frac{\theta e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2}}{2} |g_1, e_2\rangle - \frac{\theta^2 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}}{4} |e_1, e_2\rangle \right) \quad (49)$$

和第 (VB) 类似，我们考虑这个随机波函数的演化。由于 $\theta \ll 1$ ，最重要的是第二，三项，在 $t \in [\tau, T_{\text{rep}}]$ 间隔，量子坍缩概率为

$$\delta P = \frac{\theta^2}{2}$$

其中 \mathbf{k} 方向探测到光子的概率 $\delta R_{\mathbf{k}} \approx \frac{\delta\Omega}{4\pi} \delta P$ ，系统坍缩到：

$$|\psi(T_{\text{rep}})\rangle_{s,\mathbf{k}} = \frac{1}{\mathcal{N}} C_{\mathbf{k}} |\psi\rangle = \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_1} + e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_2} \right) |\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\rangle |g_1, g_2\rangle \quad (50)$$

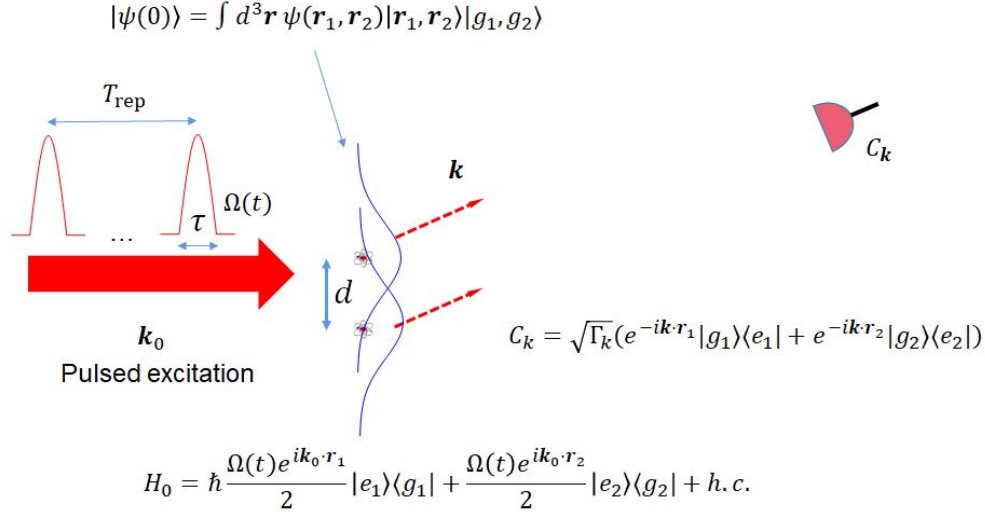


图 12. Measurement induced localization of relative displacement $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. See Eq. (50)

这样的探测，对双体波函数的相对坐标产生了影响。为了更加明显的看到这一点，我们记：

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right)$$

其中 \mathbf{R}, \mathbf{r} 分别是双原子的中心坐标，及相对坐标。

我们发现：

$$|\psi\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right)|^2 \rightarrow |\psi\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right)|^2 \frac{1 + \cos \Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{2}$$

因此，二体波函数多了一个 $\cos^2(\frac{\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{2})$ 的相对坐标调制函数。

好了，大量这样的散射，被不同方向 \mathbf{k} 探测器测量到，对应于 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ 的相对坐标 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ 的局域化。

如果我们把一个原子换成人，另一个原子换成猫，那么...

进一步的了解可参考 Wojciech Zurek, Klaus Molmer, Terry Rudolph 等经典文献。

E. 线性光学耦合下的多光学腔的探测

我们考察图 (13) 的双腔系统，该系统的等效哈密顿量和量子坍缩算符可以写为

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \hbar(\omega_1 - i\frac{\kappa_1}{2})a_1^\dagger a_1 + \hbar(\omega_2 - i\frac{\kappa_2}{2})a_2^\dagger a_2, \\ C_a &= r\sqrt{\kappa_1}a_1 + t\sqrt{\kappa_2}a_2, \\ C_b &= t\sqrt{\kappa_1}a_1 - r^*\sqrt{\kappa_2}a_2 \end{aligned} \quad (51)$$

注意，式 (51) 中量子坍缩算符的构造按照我们第 (III) 节的精神，从严格符合大系统物理原理的思想实验出发，探测器 D_a 的光子探测无法区分 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ 的漏光，因此坍缩算符是两者的叠加，叠加系数由分束器 S 模式转换矩阵决定。

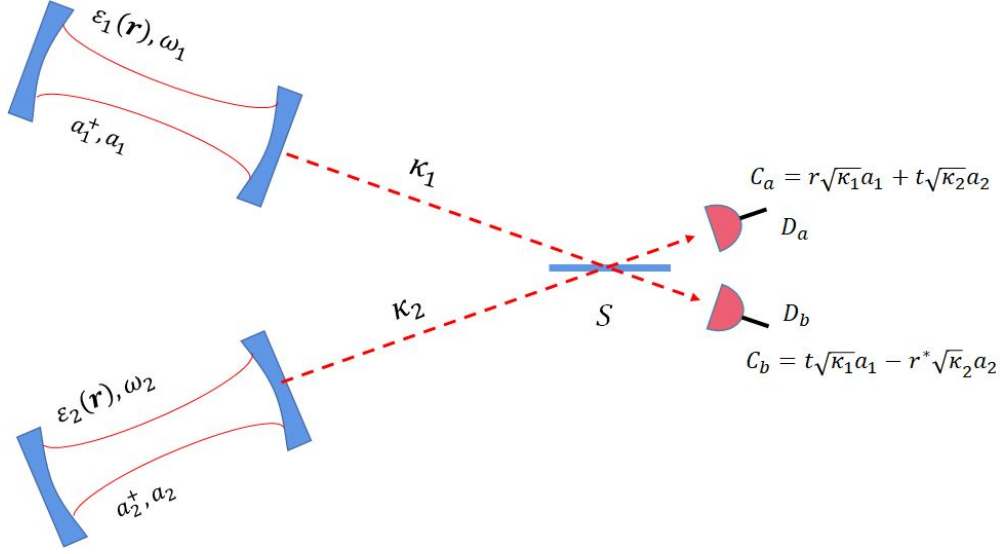


图 13. .

接下来我们考虑一个简单情形， $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ， $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ ，并且设 $r = t = 1/\sqrt{2}$ 。我们考虑光场初态是联合单光子态，

$$|\psi(t=0)\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |V\rangle$$

那么我们当然可以算出 $(0, t)$ 时刻内不发生光子探测事件后的条件量子态及相应概率

$$|\psi(t)\rangle_{S,NJ} = e^{-i2\omega t - \kappa t} |1, 1\rangle$$

$$P_{NJ}(t) = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle_{S,NJ} = e^{-2\kappa t}$$

设在 t 时刻发生光子探测事件，我们分别有

$$\delta P_a(t^+) \propto \langle \psi(t) | C_a^\dagger C_a | \psi(t) \rangle_{S,NJ}$$

$$\delta P_b(t^+) \propto \langle \psi(t) | C_b^\dagger C_b | \psi(t) \rangle_{S,NJ}$$

按照第 (II E) 的讨论，我们有 t 时刻光子探测事件发生这个条件下的条件概率分布

$$P_a = \frac{\delta P_a}{\delta P_a + \delta P_b} \quad (52)$$

$$P_b = \frac{\delta P_b}{\delta P_a + \delta P_b}$$

并且发现 $P_a = P_b = 0.5$ 。

接下来，考虑 C_a click，那么有条件量子态

$$|\psi(t^+)\rangle_S = C_a |\psi(t)\rangle_{S,NJ}, \quad (53)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger + a_2^\dagger) |V\rangle$$

接下来可以继续考虑系统的光子计数率

$$\begin{aligned}\gamma_a &= \langle \psi(t^+) | C_a^\dagger C_a | \psi(t^+) \rangle_S = \kappa \\ \gamma_b &= \langle \psi(t^+) | C_b^\dagger C_b | \psi(t^+) \rangle_S = 0.\end{aligned}\tag{54}$$

1. 和 *Hong-Ou-Mandel* 效应的联系

2. 测量导致的相对相位局域化

考察

$$|\psi(0)\rangle = |N, N\rangle\tag{55}$$

VI. 原子-光学腔-开放体系-I

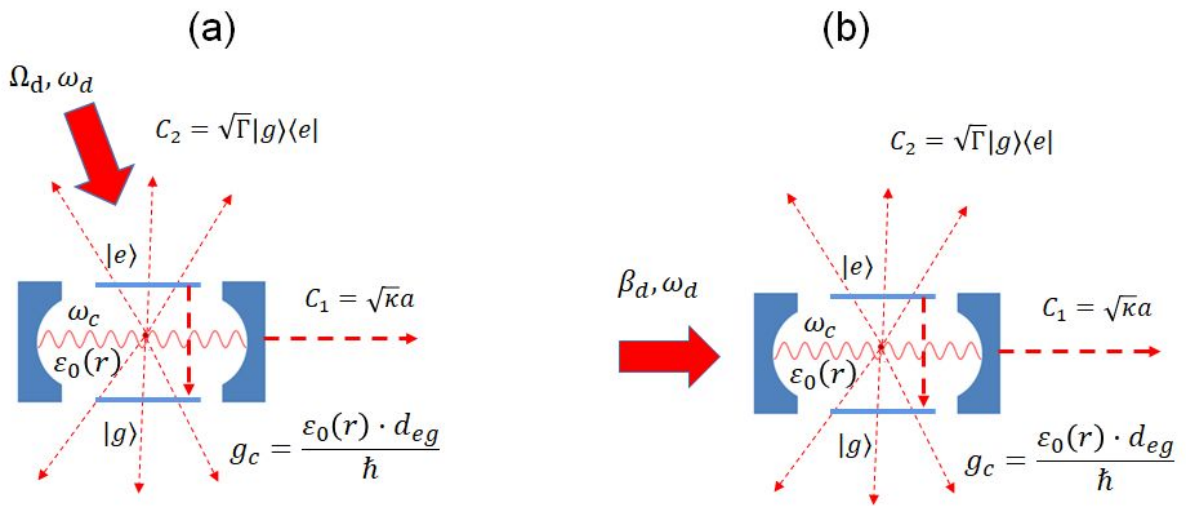


图 14. Schematic diagram for a single-atom CQED system. With coherently driven the 2-level atom in (a) and the cavity field in (b).

A. 情形一 – 原子相干驱动

1. 等效哈密顿量

我们先考虑图 (14a) 系统，二能级原子和模式 \mathcal{E}_0 腔场耦合，并被频率为 ω_d 的驱动激光场从侧面驱动。显而易见，这个是 [L8-10] 课程中我们一直考察的两个开放系统案例的结合，根据已有知识，我们可以写出等效非厄密哈密顿量：

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \hbar(-i\kappa/2)a^\dagger a + \hbar(\omega_e - i\Gamma_e/2)|e\rangle\langle e| \\ &\quad - \hbar\frac{g_c}{2}ae^{-i\omega_c t}|e\rangle\langle g| + h.c. \\ &\quad - \hbar\frac{\Omega_d}{2}e^{-i\omega_d t}|e\rangle\langle g| + h.c. \end{aligned} \quad (56)$$

其中 $\Omega_d = \langle \mathbf{E}_d \rangle \cdot \mathbf{d}_{eg}/\hbar$ 是激光场的拉比频率，我们引入了腔场和原子的耦合系数 – 单光子拉比频率 $g_c = 2\mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_{eg}/\hbar$ 。此前已经提到，这儿有一个系数 2 的问题，我们考虑量子化光场的时候，约定 $\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-$ ，而经典电动力学中常常会约定 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos\omega t$ ，有些不一致，没有实质影响。

我们有量子坍缩算符：

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\kappa}a \\ C_2 &= \sqrt{\Gamma}|g\rangle\langle e| \end{aligned} \quad (57)$$

注意，这儿我们对光场的描述运用了海森堡表象。因为我们并不关心相干态驱动场本身的动力学，这个表象相对方便。此外，式 (56) 已经做了旋转波近似，略去了第二，第三行 $|e\rangle\langle g|$ 耦合中的负频分量。

接下来我们做旋转波变换，对量子态作含时酉变换 $U = e^{-i\omega_c t}|e\rangle\langle e|$ ，我们有：

$$|e\rangle \rightarrow e^{-i\omega_c t}|e\rangle$$

$$H_{\text{eff}} \rightarrow H_{\text{eff}} - i\hbar U \partial_t U^\dagger = H_{\text{eff}} - \hbar\omega_c |e\rangle\langle e|$$

因此，

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \hbar(-i\kappa/2)a^\dagger a + \hbar(\Delta_e - i\Gamma_e/2)|e\rangle\langle e| \\ &\quad - \hbar\frac{g_c}{2}a|e\rangle\langle g| + h.c. \\ &\quad - \hbar\frac{\Omega_d}{2}e^{-i\Delta_d t}|e\rangle\langle g| + h.c. \end{aligned} \quad (58)$$

其中 $\Delta_e = \omega_{eg} - \omega_c$ 是原子共振跃迁相对于腔场的失谐量，而 $\Delta_d = \omega_d - \omega_c$ 是驱动激光场相对于腔场的失谐量。

2. ”级联”旋转波变换

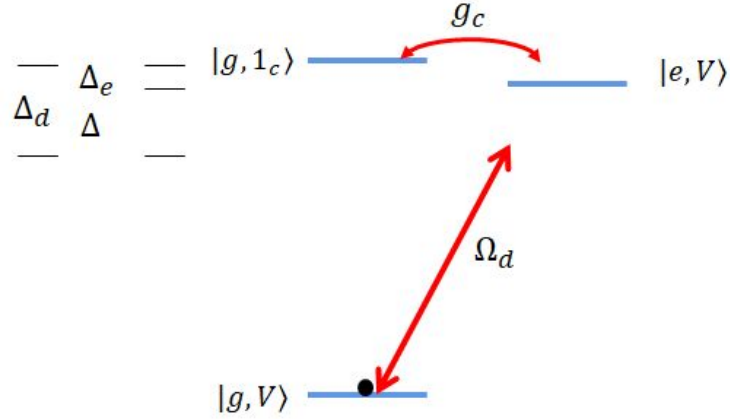


图 15. Level diagram to explain the rotation frame for Eq. (59).

当然，我们也可以做 $U = e^{-i\omega_d t|e\rangle\langle e| + i\Delta_d a^\dagger a}$ ，还可以得到不含时的等效哈密顿量

$$\begin{aligned}
 H_{\text{eff}} &= \hbar(-\Delta_d - i\kappa/2)a^\dagger a + \hbar(\Delta - i\Gamma_e/2)|e\rangle\langle e| \\
 &\quad - \hbar\frac{g_c}{2}|e\rangle\langle g| + h.c. \\
 &\quad - \hbar\frac{\Omega_d}{2}|e\rangle\langle g| + h.c.
 \end{aligned} \tag{59}$$

其中 $\Delta = \omega_{eg} - \omega_d$.

所示不同于式 (58)，式 (59) 是不含时的。如图 (15) 所示，这样对原子能级和光场同时做旋转波变换感觉复杂，其实简单。另参考 L4(图 1d)。

3. 主方程

就式 (58)(57) 或者式 (59)(57)，均可以写出系统密度矩阵的主方程

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}(H_{\text{eff}}\rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger) + C_1\rho C_1^\dagger + C_2\rho C_2^\dagger \tag{60}$$

当然，我们也可以运用随机波函数方法考察系统的演化。值得注意的是，随机波函数方法对应的 C_1 量子坍缩算符的实验实现尤其方便。

4. 原子自发辐射的 Purcell 效应

我们首先考虑一个简单情况：驱动光场强度为零： $\Omega_d = 0$ ，原子处于激发态，腔场在真空态。考察系统的衰变。由于没有驱动场，我们选择式 (58) 哈密顿量。

设 $|\psi(0)\rangle = |e, V\rangle$ ，这儿 $|V\rangle$ 代表腔场和环境电磁场均为真空态，我们考察无量子坍缩的随机波函数为

$$|\psi(t)\rangle_{NJ} = c_e(t)|e, V\rangle + c_g|g, 1c\rangle$$

由式 (58)，可以写出

$$\begin{aligned}
i\dot{c}_e &= (\Delta_e - i\frac{\Gamma_e}{2})c_e - \frac{g_c}{2}c_g \\
i\dot{c}_g &= -i\frac{\kappa}{2}c_g - \frac{g_c^*}{2}c_e
\end{aligned} \tag{61}$$

这个方程并不难解，我们将第二式形式化的写出来：

$$c_g(t) = i \int_0^t e^{-\frac{\kappa}{2}(t-\tau)} \frac{g_c^*}{2} c_e(\tau) d\tau \tag{62}$$

我们再看第一式，记 $\tilde{\Delta} = \Delta - i\Gamma/2$ ，由于这一项的存在， c_e 会有一个 $e^{-i\tilde{\Delta}t}$ 的含时因子，我们记 $c_e = \tilde{c}_e e^{-i\tilde{\Delta}t}$ ，那么 \tilde{c}_e 是缓变的。带入上式，有

$$c_g(t) = i \int_0^t e^{-i\tilde{\Delta}\tau - \frac{\kappa}{2}(t-\tau)} \frac{g_c^*}{2} \tilde{c}_e(\tau) d\tau \tag{63}$$

接下来我们分部积分：

$$\begin{aligned}
c_g(t) &= i \int_0^t e^{-\frac{\kappa}{2}t} \frac{g_c^*/2}{-i\tilde{\Delta} + \kappa/2} \tilde{c}_e(\tau) d\tau e^{-i\tilde{\Delta}\tau + \frac{\kappa}{2}\tau} \\
&\approx \frac{ig_c^*/2}{-i\tilde{\Delta} + \kappa/2} (\tilde{c}_e(t)e^{-i\tilde{\Delta}t} - \tilde{c}_e(0)e^{-\kappa t/2})
\end{aligned} \tag{64}$$

这儿，从第一行到第二行，我们近似 $\frac{d}{dt}\tilde{c}_e = 0$ 。我们进一步简化：考虑 κ 很大，在我们关心的时间尺度上，第二项可以忽略，那么有

$$c_g(t) \approx \frac{g_c^*/2}{-\Delta_e - i(\kappa - \Gamma_e)/2} c_e(t)$$

带入到式 (61) 第一式，

$$\begin{aligned}
i\dot{c}_e &= (\Delta_e - i\frac{\Gamma_e}{2})c_e - \frac{|g_c|^2/4}{-\Delta_c + i(\kappa - \Gamma_e)/2} c_e \\
&= (\Delta_e + \delta_c - i\frac{(\Gamma_e + \delta\Gamma)}{2})c_e
\end{aligned} \tag{65}$$

其中

$$\begin{aligned}
\delta_c &= \frac{|g_c|^2 \Delta_c}{4\Delta_c^2 + (\kappa - \Gamma_e)^2} \\
\delta\Gamma &= \frac{|g_c|^2 (\kappa - \Gamma_e)}{4\Delta_c^2 + (\kappa - \Gamma_e)^2}
\end{aligned} \tag{66}$$

前者是腔场耦合导致的”腔频移”，后者是腔场耦合导致的额外自发辐射 ==

1) 我们知道，原子的自发辐射率 $\Gamma \propto \mathbf{d}_{eg}^2 \omega \rho(\omega)$ ，其中 $\rho(\omega)$ 是环境光子的态密度。

Purcell 效应是说，环境的态密度可以影响原子的自发辐射率，有了自发辐射的推导，并不令人惊讶。

2) Purcell 效应也可以抑制自发辐射。

3) 图 (14a) 的处理方法，可以认为是原子-cavity 小环境-大环境耦合的开放系统，其中原子-cavity 小环境的耦合不满足马尔可夫近似，引起计入联合系统。这个方法正是二阶马尔可夫近似方法。

5. 强耦合条件

原子和腔场的强耦合表现为原子-光学腔体系的自发辐射几乎完全由漏光完成 (C_1 量子坍塌), 相应的, $\delta\Gamma \gg \Gamma_e$ 。此外, 为了和上述推导自治, 我们需要 $\delta\Gamma \ll \kappa$, 考察 $\Delta_c = 0$ 的共振情况, 记“单原子协作参数”

$$\eta \equiv \frac{|g_c|^2}{\kappa\Gamma} \quad (67)$$

我们有 CQED 的强耦合条件:

$$\eta \gg 1$$

考虑到

$$g_c = \mathcal{E}_0 d_{eg} / \hbar$$

$$\Gamma_e \propto d_{eg}^2 k_c^3$$

此外, 记 w 是腔场 \mathcal{E}_0 的腰宽, 腔长是 L , $|t|^2$ 是腔镜的透射率, 考虑原子位于 $\mathbf{r} = (x_0, 0, 0)$, 那么

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \approx \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_0 w^2 L}} \cos(k_c x_0)$$

$$\kappa = \frac{c}{2L} |t|^2$$

η 可以化简:

$$\eta \approx \frac{\lambda_c^2}{w^2 |t|^2} \cos^2(k_c x_0) \quad (68)$$

协作参数 η 刻画了原子吸收和辐射腔场光子的能力。

6. 可控单光子辐射

接下来我们考察 $\eta \gg 1$ 体系的 Ω_d 脉冲光调控。

1) $|\psi(0)\rangle = |g, V\rangle$, π 脉冲制备原子到激发态 $|e, V\rangle$ 。

2) $|e, V\rangle \rightarrow |g, 1_c\rangle$, 单光子波包产生:

$$\mathcal{E}_l(x) \sim \Theta(t - x/c) e^{-\delta\Gamma|t-x/c|}$$

7. 弱激发极限

现在我们考虑 Ω_d 弱驱动下的系统响应。具体来说, 考虑式 (59) 哈密顿量及系统波函数在 $\Omega_d \rightarrow 0$ 极限下的微扰展开, $|\psi(t)\rangle_{NJ} = c_{g,V}|g, V\rangle + c_{e,V}|e, V\rangle + c_{g,1}|g, 1\rangle$, 可以写出方程

$$\begin{aligned} i\dot{c}_{g,V} &= 0 + \frac{\Omega_d^*}{2} c_{e,V}, \\ i\dot{c}_{e,V} &= (\Delta - i\frac{\Gamma_e}{2}) c_{e,V} - \frac{\Omega_d}{2} c_{g,V} - \frac{g_c}{2} c_{g,1}, \\ i\dot{c}_{g,1} &= (-\Delta_d - i\frac{\kappa}{2}) c_{g,1} - \frac{g_c^*}{2} c_{e,V} \end{aligned} \quad (69)$$

注意，因为我们已经把哈密顿量写出了式 (59) 不含时的形式，那么这个方程的微扰解和弱激发下的二能级原子 (L9 图 3 gh) 类似：我们知道，如果 $\Omega_d = 0$ ，那么 $c_{g,V} = 1$, $c_{e,V} = c_{g,1} = 0$ 。在弱 Ω_d 极限下，系统会演化到 H_{eff} 的本征态 $|\tilde{g}\rangle$ 态，我们按照 [L13b 式 (8)] 的方法可以获得 $|\psi(t)\rangle_{NJ} \approx |\tilde{g}\rangle$ 来逼近系统的演化：

$$\begin{aligned} (\Delta - i\frac{\Gamma_e}{2})c_{e,V} - \frac{\Omega_d}{2}c_{g,V} - \frac{g_c}{2}c_{g,1} &= 0, \\ (-\Delta_d - i\frac{\kappa}{2})c_{g,1} - \frac{g_c^*}{2}c_{e,V} &= 0, \\ c_{g,V} &= 1. \end{aligned} \quad (70)$$

因此有 $\rho \approx |\tilde{g}\rangle\langle\tilde{g}|$, 光子计数率:

$$\gamma_1 = \langle\tilde{g}|C_1^\dagger C_1|\tilde{g}\rangle = \dots$$

$$\gamma_2 = \langle\tilde{g}|C_2^\dagger C_2|\tilde{g}\rangle = \dots$$

真空拉比劈裂...

B. 情形二 – 腔场相干驱动

我们考虑图 (14b) 体系:

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \hbar(-i\kappa/2)a^\dagger a + \hbar(\Delta_e - i\Gamma_e/2)|e\rangle\langle e| \\ &\quad - \hbar\frac{g_c}{2}a|e\rangle\langle g| + h.c. \\ &\quad + \hbar\beta e^{-i\Delta_d t}a^\dagger + h.c. \end{aligned} \quad (71)$$

其中 $\Delta_c = \omega_{eg} - \omega_c$ 是原子共振跃迁相对于腔场的失谐量，而 $\Delta_d = \omega_d - \omega_c$ 是注入激光场相对于腔场的失谐量。

式 (71) 和式 (58) 区别不大，物理上只是将驱动原子的侧向光场变为驱动腔场的正向光场。

1. 弱激发极限

和式 (69) 系列推导类似，我们考察在弱激发极限下原子的散射率 $\gamma_1(\omega_d) = \langle\psi(t)|C_1^\dagger C_1|\psi(t)\rangle_{NJ}$ 随驱动频率 ω_d 的变化。为简化起见，考虑腔场和原子跃迁共振， $\omega_{eg} = \omega_c$ ，系统初态是 $|\psi(t=0)\rangle = |g, V\rangle$ 。

和式 (59) 类似 (并考虑到 $\omega_{eg} = \omega_c$ 这个条件，即 $\Delta_e = 0$)，我们可以做旋转波变化 ($a \rightarrow ae^{i\Delta_d t}$)，从式 (71) 得到不含时哈密顿量:

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \hbar(\Delta_d - i\kappa/2)a^\dagger a + \hbar(\Delta_d - i\Gamma_e/2)|e\rangle\langle e| \\ &\quad - \hbar\frac{g_c}{2}a|e\rangle\langle g| + h.c. \\ &\quad + \hbar\beta a^\dagger + h.c. \end{aligned} \quad (72)$$

我们考虑式 (71) 哈密顿量及系统波函数在 $\beta \rightarrow 0$ 极限下的微扰展开， $|\psi(t)\rangle_{NJ} = c_{g,v}|g, V\rangle + c_{g,1}|g, 1\rangle + c_e|e, V\rangle$ ，可以写出方程

$$\begin{aligned}
i\dot{c}_{g,1} &= (\Delta_d - i\frac{\kappa}{2})c_{g,1} - \frac{g_c^*}{2}c_e + \beta c_{g,v} \\
i\dot{c}_{g,v} &= \beta^* c_{g,1} \\
i\dot{c}_e &= (\Delta_d - i\frac{\Gamma_e}{2})c_e - \frac{g_c}{2}c_{g,1}
\end{aligned} \tag{73}$$

注意，因为我们已经把哈密顿量写出了式 (72) 不含时的形式，那么这个方程的微扰解和弱激发下的二能级原子 (L9 图 3 gh) 类似：我们知道，如果 $\beta = 0$ ，那么 $c_{g,v} = 1$, $c_e = c_{g,1} = 0$ 。在弱 β 极限下，系统会演化到 $H_{\text{eff}}|\tilde{g}\rangle$ 态，我们按照 [L13b 式 (8)] 的方法可以获得 $|\psi(t)\rangle_{NJ} \approx |\tilde{g}\rangle$ 来逼近系统的演化：

$$\begin{aligned}
(\Delta_d - i\frac{\kappa}{2})c_{g,1} - \frac{g_c^*}{2}c_e + \beta c_{g,v} &= 0 \\
(\Delta_d - i\frac{\Gamma_e}{2})c_e - \frac{g_c}{2}c_{g,1} &= 0 \\
c_{g,v} &= 1
\end{aligned} \tag{74}$$

因此有：

$$\begin{aligned}
c_{g,1} &= \frac{\beta}{-\frac{|g_c|^2/4}{\Delta_d - i\Gamma_e/2} + \Delta_d - i\kappa/2} \\
c_e &= \frac{\beta g_c/2}{-|g_c|^2/4 + (\Delta_d - i\kappa/2)(\Delta_d - i\Gamma_e/2)}
\end{aligned} \tag{75}$$

我们有

$$\gamma_1(\omega_d) = |c_{g,1}|^2 \kappa = \left| \frac{\beta}{-\frac{|g_c|^2/4}{\omega_d - \omega_c - i\Gamma_e/2} + \omega_d - \omega_c - i\kappa/2} \right|^2 \kappa$$

类似的，还有

$$\gamma_2(\omega_d) = |c_e|^2 \Gamma_e = \left| \frac{\beta g_c/2}{-|g_c|^2/4 + (\omega_d - \omega_c - i\kappa/2)(\omega_d - \omega_c - i\Gamma_e/2)} \right|^2 \Gamma_e$$

我们可以试图优化 $\gamma_{1,2}(\omega_d)$ ，可以发现，在耗散 κ, Γ 较小时， $\Delta_d = \pm |g_c|/2$ 才是最优的，这个是原子腔体耦合造成的真空拉比分裂。而当 κ, Γ 比较大时，这个分裂是看不到的。

===== Lecture 13 =====

VII. JAYNES-CUMMINGS 模型

J-C 模型在 L2 已经介绍，在式 (58) 中我们考虑 $g_c \gg \Gamma, \kappa$ 。此外，为简单起见，设驱动场 $\Omega = 0$ ，有：

$$H_{\text{JC}} = \hbar \Delta_e |e\rangle\langle e| - \left(\hbar \frac{g_c}{2} a |e\rangle\langle g| + h.c. \right) \tag{76}$$

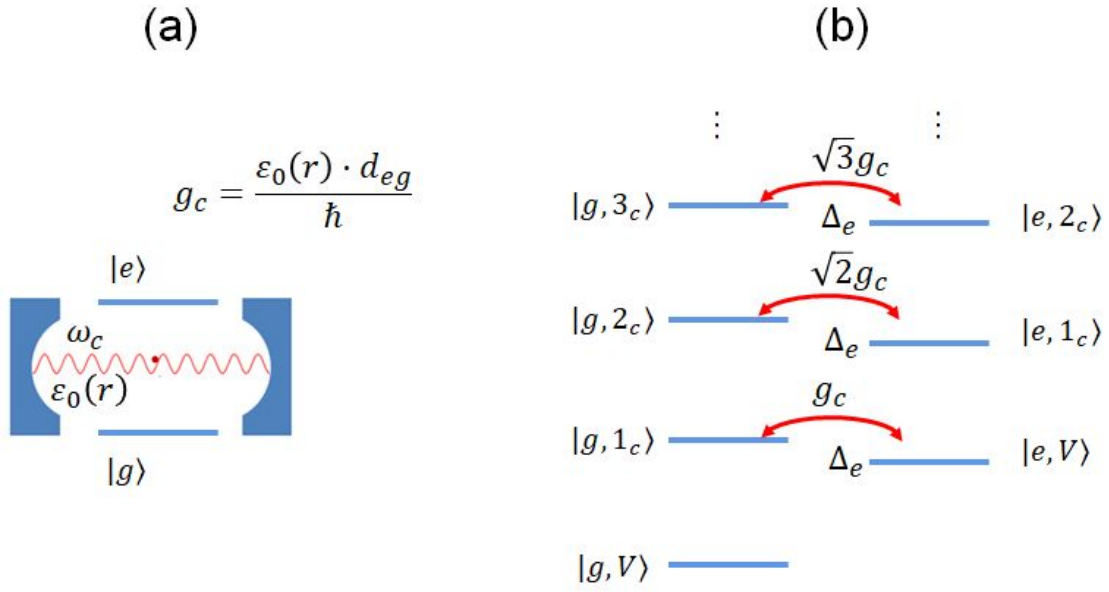


图 16. Schematic level diagram of the Jaynes-Cummings model.

1. 真空拉比振荡

见 L2

2. 拉比振荡的量子消退和复现

考虑

$$|\psi(0)\rangle = |g, \alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |g, n\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \dots$$

3. 光子数无损测量

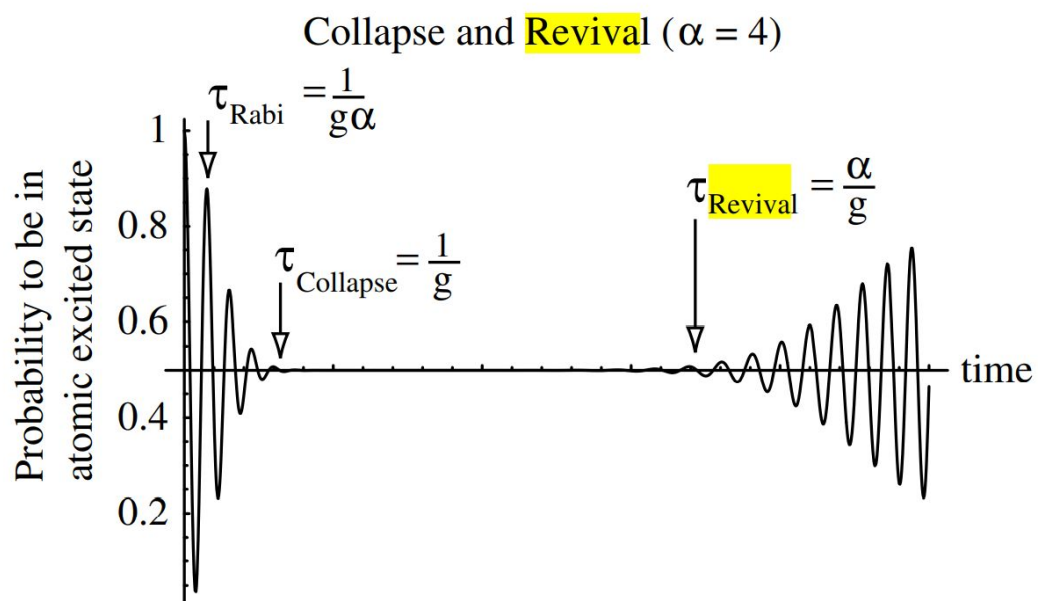


图 17. Quantum collapse and revival of Rabi oscillation (From Lukin lecture notes)

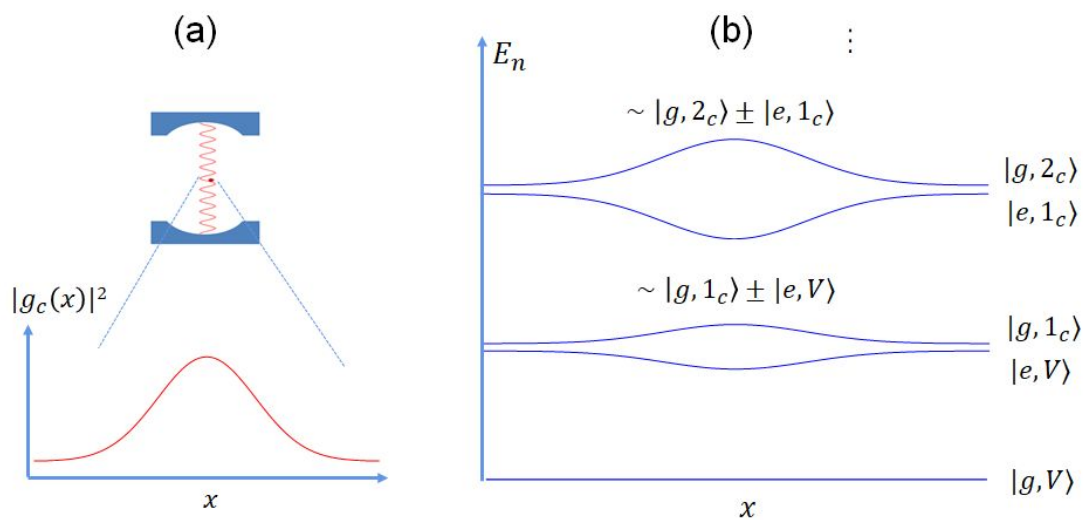


图 18. Cavity shift across the cavity.

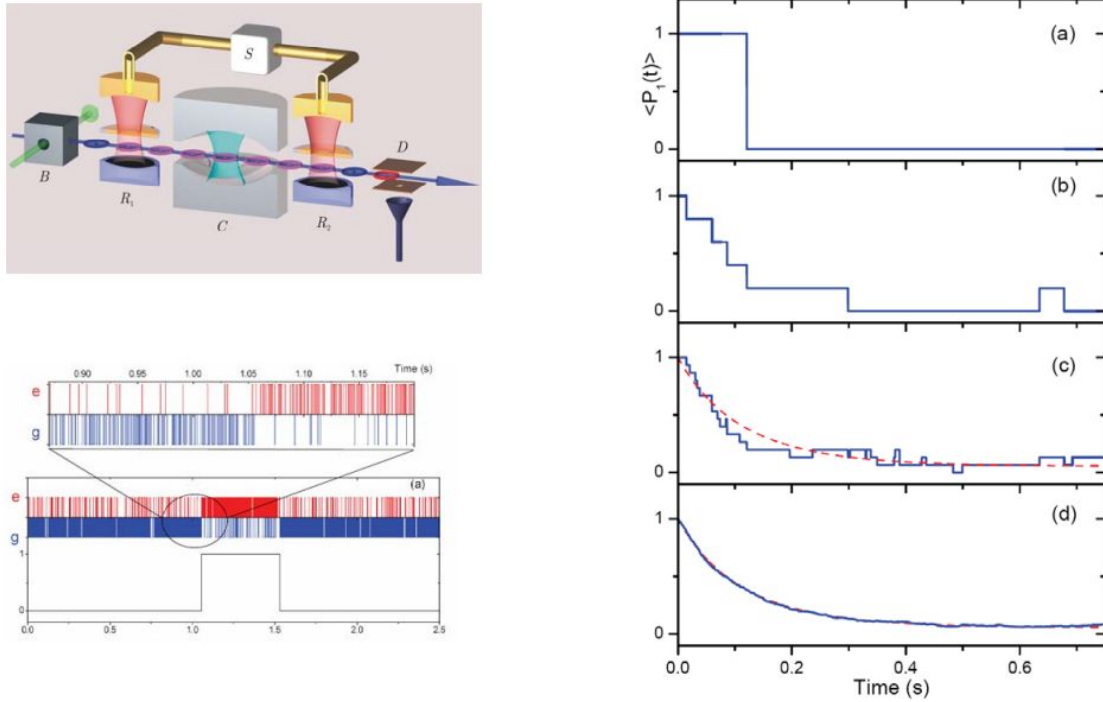


图 19. Photon number detection .

VIII. 当代量子光学实验选讲

A. 光子态无损测量

B. 宏观微波猫态的里德堡制备和检测

IX. 总复习

1. 量子力学方法回顾：态矢量，观测量，正则量子化，能量表象，演化汇景，直积态，密度矩阵，熵。案例：从氢原子到核磁共振，简谐振子，相干态。观测量的期待值，分布函数，标准差计算。
2. 耦合振子的正则量子化，光场的正则量子化，Fock 态和 Glauber 相干态，电磁算符和磁场算符，零点能和零点电磁涨落。光场算符的模式变换。高斯光学简介。
3. 二能级原子和单模光场的偶极相互作用-旋转波近似下的单光子拉比振荡。“受迫振子”辐射光场。激光场作为 Glauber 相干态光场。相干态的超完备性,P 函数和 Q 函数，Wigner 函数。激光的玩具模型。
4. 旋转波变换和旋转波近似。相干调控的布洛赫球方法，拉比振荡，组合脉冲案例。原子“自旋”的精密测量，原子钟，量子投影噪声。
5. 光子计数，强度关联函数，单模光场的光子数分布，双模光场的 HBT 效应，Glauber 相干态的相干性，泊松过程，光子散粒噪声。

6. 光场线性光学变换规则和简单应用, Hong-Ou-Mandel 效应, 条件量子态。光学损耗的量子描述。
7. 光场正交分量的内差测量, 线性干涉仪的噪声分析和灵敏度分析。光场压缩态的产生和应用。
8. 开放系统的 Wigner-Weisskopf 理论框架,, 课程相关基本案例, Markovian 近似条件, 系统算符 Heisenburg-Langevin 方程和密度矩阵主方程的基本特征和简单解, 涨落-耗散定理。
9. 随机波函数方法的理论框架, 课程相关基本案例。等效非厄密哈密顿量, 量子跳跃 (坍缩)。无坍缩条件量子态的相干非厄密演化。简单非厄密哈密顿量体系的线性响应计算。观测导致的局域化: HOM 效应的随机波函数解释, 海森堡显微镜。
10. J-C 模型物理的简单案例。单原子的腔电动力学基础, 自发辐射的 Purcell 效应, CQED 强耦合条件及可控单光子源。

=====

第四次作业第二部分

1) 请选择你习惯的编程语言 (如 matlab), 以第二种随机波函数数值方法 (允许波函数不归一) 模拟图 (3f) 的二能级原子阻尼拉比振荡, 给出 ρ_{ee} 的单次随机波函数期待值 $\rho_{ee,s}$ 及平均值 $\bar{\rho}_{ee}$

2) 考虑图 (4) 系统, 原子初态是 $|\psi(t=0)\rangle = |g\rangle$, 考虑 $|\Omega|^2 \ll \Delta^2 + \Gamma^2/4$ 的弱激发情形, 请估算系统在 Ω 驱动下三能级原子进入暗态 $|a\rangle$ 的平均时间。

3) 请结合上下文, 推导式 (28)(29).

第五次作业第一部分

1) 请结合上下文, 从式 (51) 开始推导式 (54)。

答: 略

2) 考察式 (55) 的某一次随机波函数实现, 前 M 次 click 恰巧都由 D_b 完成, 请给出接下来 $\gamma_a = \langle \psi | C_a^\dagger C_a | \psi \rangle_S$ 及 $\gamma_b = \langle \psi | C_b^\dagger C_b | \psi \rangle_S$ 。

答: M 次 D_b click 后的波函数可以写为 (未归一化):

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{S,M_b} &= C_b^M |N, N\rangle, \\
&= \sum_{l=0}^M (-1)^l C_M^l \sqrt{\frac{N!}{(N-l)!} \frac{N!}{(N-M+l)!}} |N-l, N-M+l\rangle
\end{aligned} \tag{77}$$

其中 $C_m^n \equiv \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

我们考察接下来探测器 a, b click 的条件概率 $P_{a,b} \propto \gamma_{a,b}^c$, 我们有

$$\begin{aligned}
\gamma_a^c &= \kappa \langle \psi | C_a^\dagger C_a | \psi \rangle_{S,M_b}, \\
&= \frac{\kappa}{\mathcal{N}} \sum_{l=0}^M (C_M^l)^2 \frac{N!}{(N-l)!} \frac{N!}{(N-M+l)!} ((N-1) - (N-M+l)), \\
\gamma_b^c &= \kappa \langle \psi | C_b^\dagger C_b | \psi \rangle_{S,M_b}, \\
&= \frac{\kappa}{\mathcal{N}} \sum_{l=0}^M (C_M^l)^2 \frac{N!}{(N-l)!} \frac{N!}{(N-M+l)!} ((N-1) + (N-M+l))
\end{aligned} \tag{78}$$

其中 $\mathcal{N} = \langle \psi | \psi \rangle_{S,M_b}$ 为归一化常数。

当 $N > M \gg 1$ 时, 可以发现对于条件概率 $P_a = \frac{\gamma_a^c}{\gamma_a^c + \gamma_b^c}$, $P_b = \frac{\gamma_b^c}{\gamma_a^c + \gamma_b^c}$, 有 $P_b \gg P_a$, 算一下...

3) 考察图 (14)a 系统, 原子-腔场体系初态是基态:

$$|\psi(0)\rangle = |g, V\rangle$$

接下来, 方波脉冲光 $\Omega_d(t) = \pi/2\tau$ 持续了事件 τ 将原子态打到 Bloch 球的”赤道”, 我们考虑短脉冲极限, $g_c\tau \ll 1, \Gamma\tau, \kappa\tau \ll 1$, 因此原子态操控是完美的, 在 τ 时刻我们有

$$|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, V\rangle + |e, V\rangle)$$

我们考虑强耦合极限 (式 (67)), 请设计假象实验中的探测器, 尽可能详细的讨论接下来的探测结果及相应随机波函数的演化。

答: 我们考虑腔外有探测器 D_1 对应 C_1 量子坍缩, 另有 4π 探测器 D_2 对应 C_2 量子坍缩。

因为 $\tau \ll 1/\Gamma, 1/\kappa$, 我们可以忽略脉冲光期间的 cavity-atom 耦合, 将脉冲后的系统量子态写出:

$$|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, V\rangle + i|e, V\rangle)$$

我们可以将此后无量子坍缩的波函数展开:

$$|\psi(t)\rangle_{NJ} = c_{g,v}|g, V\rangle + c_e|e, V\rangle + c_g|g, 1\rangle$$

并且有初条件: $c_{g,v}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_e(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2}}$, $c_g(\tau) = 0$ 。类似于式 (61), 我们可以写出非厄密演化的薛定谔方程:

$$\begin{aligned}
i\dot{c}_e &= (\Delta_e - i\frac{\Gamma_e}{2})c_e - \frac{g_c}{2}c_g \\
i\dot{c}_g &= -i\frac{\kappa}{2}c_g - \frac{g_c^*}{2}c_e \\
i\dot{c}_{g,v} &= 0
\end{aligned} \tag{79}$$

从式 (79), 我们很明显的发现 $c_{g,v}$ 完全独立于 c_e, c_g , 而后的耦合方程和式 (61) 完全一致, 因此分析方法也完全一样: 我们可以数值求解 $c_e(t), c_g(t)$ 。这儿我们还是考虑类似于式 (61) 的微扰极限, 对于 $t \gg 1/\kappa$, 有

$$c_e(t) = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i(\Delta_e + \delta_c)t - (\Gamma_e + \delta\Gamma)t/2}$$

其中 $\delta_c, \delta\Gamma$ 仍然由式 (66) 给出。而

$$c_g(t) \approx \frac{g_c^*/2}{-\Delta_e - i(\kappa - \Gamma_e)/2} c_e(t)$$

这儿我们运用了不归一化的随机波函数方法, 需要注意的是, $|\psi(t)\rangle_{NJ}$ 存在的概率由 $\mathcal{N}^2 = \langle \psi(t)|\psi(t)\rangle_{NJ}$ 决定, 对于观测量 O 平均值的计算, 其贡献为 $\mathcal{N}^2 \langle \psi(t)|O|\psi(t)\rangle_{NJ} / \mathcal{N}^2 = \langle \psi(t)|O|\psi(t)\rangle_{NJ}$ 。由于对单激发来说, $|\psi(t)\rangle_{NJ}$ 是 t 时刻还能辐射光子的唯一随机波函数形式, 因此我们可以写出:

$$\gamma_1(t) = \langle \psi(t)|C_1^\dagger C_1|\psi(t)\rangle_{NJ} = \kappa |c_g(t)|^2$$

$$\gamma_2(t) = \langle \psi(t)|C_2^\dagger C_2|\psi(t)\rangle_{NJ} = \Gamma_e |c_e(t)|^2$$

我们发现:

- a) 有 $|c_{g,v}|^2 = 50\%$ 概率系统完全没有量子坍缩, 探测器 $D_{1,2}$ 均没有技术。
- b) 有 $|c_e(t)|^2$ 概率 (随时间指数衰减, 衰减常数 $\Gamma_e + \delta\Gamma$) 被 D_2 探测到, 探测后系统归于 $|g, V\rangle$ 态, 不再演化。
- c) 有 $|c_g(t)|^2$ 概率 (随时间指数衰减, 衰减常数 $\Gamma_e + \delta\Gamma$) 被 D_1 探测到, 探测后系统归于 $|g, V\rangle$ 态, 不再演化。

其中 $D_{1,2}$ 探测到的概率比例, 在 $\Delta_e = 0$ 时, 是 $\eta \gg 1$ (强耦合)。在 $\Delta_e \neq 0$ 时, 由于耦合减弱, 比例以 $\eta|\kappa|^2/(4\Delta_e^2 + \kappa^2)$ 下降。