

## 线性量子光学 - III

吴赛骏\*

复旦大学物理系, 上海 200433, 中国。

本文档随教学进程跟新。

## I. 回顾性讨论

这是线性量子光学的第三讲，也是最后一讲，在此先对相关内容稍作回顾。

线性光学，是指光子和光子之间没有相互作用，独立传播。在真空及透明电介质中，线性传播是弱光物理的极佳近似。在处理具体问题的时候，我们选择了将线性光学元件独立开来，对脉冲传播光场运用海森堡图像，形成输入输出光场算符的变换方程，

$$b_j^\dagger = \sum_k S_{jk} a_k^\dagger$$

$$a_k^\dagger = \sum_j S_{jk}^* b_j^\dagger$$

进而获得量子态变换的规则，对于  $|\psi\rangle_{\text{in}} = f(a_k^\dagger)|V\rangle$  来说：

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = |\psi\rangle_{\text{in}}$$

$$= f(\sum_j S_{kj}^* b_j^\dagger)|V\rangle \quad (1)$$

对于  $|\psi\rangle_{\text{out}} = g(b_j^\dagger)|V\rangle$  来说：

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = |\psi\rangle_{\text{out}}$$

$$= g(\sum_k S_{jk} a_k^\dagger)|V\rangle \quad (2)$$

在上一节课已经提到，如果我们的宇宙只有真空及这些线性光学元件，那么我们完全可以重新计算光场的模式函数  $\mathcal{E}_j$  并在新的模式函数下，由 L2 的正则方法量子化我们的光场。在新的基矢下，所有模式都独立演化，因此线性量子光学的内禀性质似乎复杂不到哪儿去？这个直觉不见得是对的。光场量子态在不同模式下的变换并在特定基矢展开，这个数学过程可能极具复杂性。例如，如图 (1) 的输入输出模式，对特定输入 Fock 态，输出态的 Fock 态展开系数实际上牵涉到一类“玻色采样”问题，对于大  $n$  的线性光学系统即较多光子数来说，无法由经典计算完成。而即使在  $n = 2$  的情况下，也可以有 Hong-Ou-Mandel 的奇妙量子效应 (和 HBT 效应对应)。另一方面，在引入光子测量后，我们发现条件量子态 – 在部分输出端的光子读数确定的情况下另一些没有被监控的输出端光子态 – 可以用来模拟光子-光子相互作用，这样形成“非线性量子门”。结合单光子态本身的操控，原则上可以形成基于线性光学的通用量子计算。

当然，我们讨论了光学损耗及线性光学变换下量子态保真度衰减，这两个”技术问题“导致基于线性量子光学的光子态操控很难在多光子纠缠的 Hilbert 空间达到完美，除非是引入”量子纠错“机制。

我们还讨论了在光损失和参数不精确等缺陷面前相对稳定的 Glauber 相干态，

$$|\{\alpha_j\}\rangle = \prod_j D_j(\alpha_j)|V\rangle$$

很容易证明，经过任意线性变换，相干态总可以写成直积态的形式：

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \prod_k D_k(\sum_j S_{kj}^* \alpha_j)|V\rangle \quad (3)$$

---

\* saijunwu@fudan.edu.cn

即完全不存在不同模式之间的量子纠缠。也正因为如此，相干态的损失仅仅表现为振幅的衰减， $\alpha \rightarrow t\alpha$ ，而不会导致纯态的退相干。

Glauber 相干态是对量子系统建立经典直觉的重要工具。例如，在上一讲我们发现，对线性光学系统注入相干态可以用来实现对未知量子态正交分量  $x_\beta$  的分布测量。而通过改变  $\beta$  的角度反复收集  $f(x_\beta)$  分布数据，可以实现量子态的“相空间”层析重构，进而实现量子态的全面表征。

以上的讨论专注于线性光学系统下光场量子态的操控和表征。另一方面，线性变换矩阵  $S_{jk}(P)$  中参数  $P$  的测量本身非常重要 – 事实上，对参数  $P$  的估计正是光学精密测量物理。我们知道的马赫-曾德干涉仪，迈克耳孙干涉仪，萨格纳克干涉仪，即其他可以想象的双路干涉仪，均可以由  $2 \times 2$  的矩阵  $S(P)$  描述。将最重要的参数编码到干涉仪内部自由传播光场的相位  $\phi$ ，并在输出端读出。

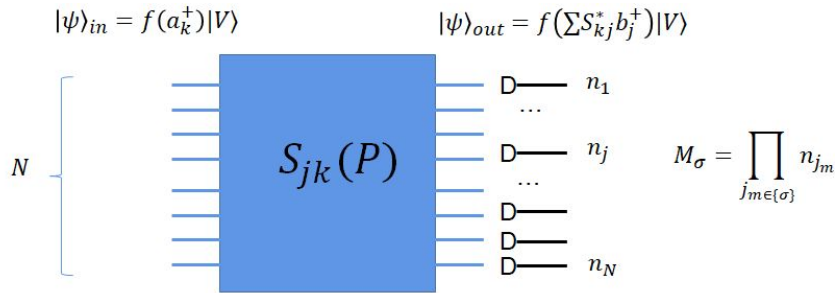


图 1. Precision measurements with quantum light, a general framework

## II. 非线性干涉仪

一般来说，运用光场进行精密测量可以用图 (1) 表示，其中输入光子态  $|\psi\rangle_{in}$ ，线性矩阵  $S(P)$ ，以及测量变量  $M_\sigma$ ，均可以通过“量子测量”理论，针对待测量  $P$  优化。

可以想象，这样的测量，可能的变化是海量的。我们将测量方法分类，如果在光子态操控上只牵涉到线性光学网络，而测量量  $M = n_{1,2}$  只牵涉到光强的线性函数，这样的干涉测量就是“线性干涉仪”测量。基于线性干涉仪的测量可以有各种输入量子态，上两节课我们讨论了输入态为单光子态，相干态，以及压缩态的可能性。此外，而对于  $\bar{n} \ll 1$  的热态光源来说，精密测量必须运用时域-频域多模的热光，而对于线性干涉和光强测量来说，光源相干时间以外的读数噪声也呈现泊松分布，因此灵敏度分析和相干态类似。

非线性干涉仪至少有如下两者特征之一：

- a) 观测量  $M$  是光强的非线性函数。
- b) 光场量子态的操控牵涉到超越线性光学变换 (式 (1)(2))。

### A. 联合光子探测下的非线性干涉仪

如图 (2b)，我们考虑观测量 M-Z 干涉仪为 Fock 态输入

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = a_1^\dagger a_2^\dagger |V\rangle \quad (4)$$

由输入输出关系  $S_{MZ}$ ，我们将量子态用输出算符  $b_{1,2}^\dagger$  表达：

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{out}} &= (\cos(\frac{\phi}{2})b_1^\dagger + \sin(\frac{\phi}{2})b_2^\dagger)(-\sin(\frac{\phi}{2})b_1^\dagger + \cos(\frac{\phi}{2})b_2^\dagger)|V\rangle, \\ &= \cos(\phi)b_1^\dagger b_2^\dagger + \sin(\phi) \left( \frac{1}{2}(b_1^\dagger)^2 - \frac{1}{2}(b_2^\dagger)^2 \right) |V\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

在输出端，我们选择观测量为

$$M = n_1 n_2$$

显然的是， $n_1 n_2 = \hat{N}[n_1 n_2]$ ，因为  $b_1, b_2$  模式是正交的。

我们有

$$\bar{M} = \cos^2 \phi$$

当然，如果我们考虑的是  $N$  次重复测量，对应光子态为  $\prod_l^N a_{1,l}^\dagger a_{2,l}^\dagger |V\rangle$ ，观测量为  $M = \sum_l^N n_{1,l} n_{2,l}$ ，那么还可以得到，

$$\bar{M} = N \cos^2 \phi$$

为了计算测量的涨落，我们从式 (5)，由

$$\left( \sum_l^N n_{1,l} n_{2,l} \right)^2 = \sum_{l \neq l'} n_{1,l} n_{2,l} n_{1,l'} n_{2,l'} + \sum_l n_{1,l}^2 n_{2,l}^2$$

，容易发现

$$\overline{M^2} = N(N-1)\cos^4 \phi + N\cos^2 \phi$$

因此有

$$\Delta M = \sqrt{\overline{M^2} - (\bar{M})^2} = \sqrt{N} |\cos \phi \sin \phi|$$

由此，我们可以得到通过测量  $M = n_1 n_2$  推知相移  $\phi$ ，相位测量精度为

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{\Delta M}{\partial_\phi \bar{M}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2N}} \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) 的第三行是说，基于双光子入射，双光子联合探测的图 (3b) 干涉仪，其相位精度为  $\Delta \phi = \frac{1}{\sqrt{2\bar{n}}}$ ，其中  $\bar{n} = 2N$  是干涉仪运用到的光子总数，这个精度相对于基于相干态的干涉仪相位精度， $\Delta \phi \geq \frac{1}{\bar{n}}$ ，提高了  $\sqrt{2}$  倍。

接下来，为了做更加直接的对比，我们回到图 (3a) 的单光子干涉仪（上节课已经讨论过），我们考察  $2N$  个单光子入射， $2N$  次测量。由于是单光子测量，观测量可以随便选取  $n_1$  或者  $n_2$ ，这儿选  $n_1$ ，

$$M = \sum_l^{2N} n_{1,l}$$

$$\bar{M} = 2N \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

并且由

$$\left(\sum_l^N n_{1,l}\right)^2 = \sum_{l \neq l'} n_{1,l} n_{1,l'} + \sum_l n_{1,l}^2$$

, 容易由式 (5) 发现

$$\overline{M^2} = 2N(2N-1) \cos^4\left(\frac{\phi}{2}\right) + 2N \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

因此有

$$\Delta M = \sqrt{2N} \left| \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right|$$

因此有

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{\Delta M}{\partial_\phi \bar{M}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \end{aligned} \quad (7)$$

请同学们对比式 (6)(7), 并回顾前两讲相干态注入线性干涉仪的讨论。

### B. 光子数-相位不确定关系再讨论

我们考察图 (2a) 单光子干涉仪, 及图 (2b) 双光子干涉仪。第一个分束器以后两路光的光子数相对涨落是不同的。

对于图 (2a),  $\Delta n = 1$ , 如果我们重复两次这个实验,  $N = 2$ , 那么由于两次实验完全不相关, 那么  $\Delta n = \sqrt{2}$ 。

对于图 (2b), 由于 Hong-Ou-Mandel 效应, 第一个分束器后一定有  $\Delta n = 2$ 。

图 (2b) 相对光子数涨落的  $\sqrt{2}$  倍增强, 为这种干涉仪形成  $\sqrt{2}$  增强的相位精度提供了物理基础。

可以想象的是, 如果我们能够在干涉仪两臂 (图 (2)a 或者 (2)b, 两个分束器中间部分) 制造”正午态”(NOON 态)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N0\rangle + |0N\rangle) \quad (8)$$

那么有可能可以形成海森堡极限相位测量精度:

$$\Delta\phi = \frac{1}{N}$$

不幸的是, 式 (8) 态只有当  $N = 2$  的时候才能由线性干涉, 像图 (2b) 一样产生, 对于  $N > 2$ , 目前人类尚没有特别好的办法。

退而求其次的方法, 是上节课说的 squeezing, 其相位精度的  $e^{|\xi|}$  倍增强, 也是以光子数相对涨落的对应增强为基础的。

### C. 线性分束器的酉矩阵表达 (可跳过)

为了便于进一步介绍非线性光学变换, 我们首先补充介绍一下线性变换的酉矩阵表达。

我们考虑酉矩阵

$$S(\theta, \phi) = e^{i(\theta J_+ e^{i\phi} + h.c.)} \quad (9)$$

其中:

$$J_+ = a_1^\dagger a_2$$

$$J_- = a_2^\dagger a_1$$

还定义

$$J_z = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) = \frac{1}{2}[J_+, J_-]$$

且

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$$

$$J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

事实上,  $J_{x,y,z}$  的这个定义方法, 是角动量算符的 Shrwinger 表示。

定义

$$\begin{aligned} a_1(\theta, \phi) &= S(\theta, \phi) a_1 S^\dagger(\theta, \phi) \\ a_2(\theta, \phi) &= S(\theta, \phi) a_2 S^\dagger(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (10)$$

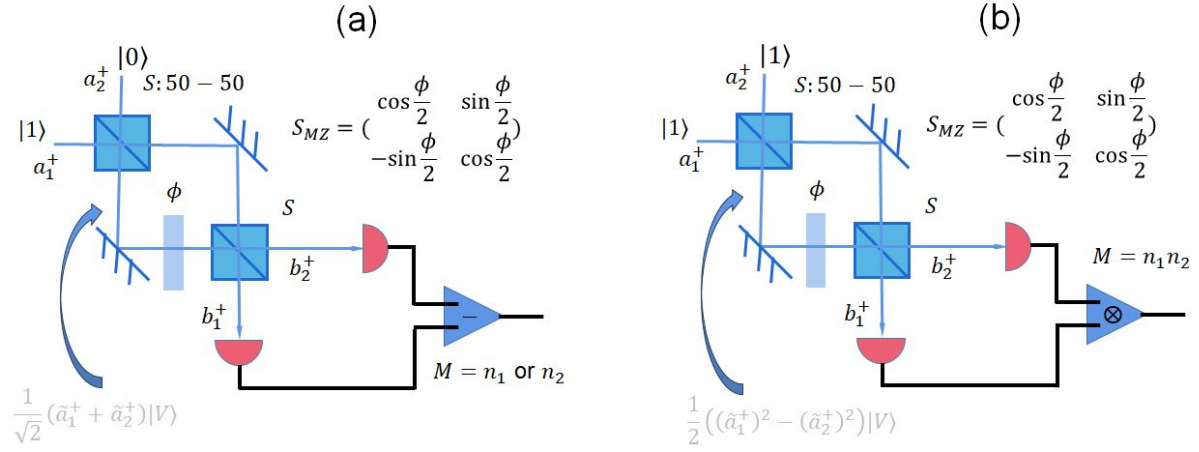


图 2. (a) Single-photon M-Z Interferometer (b) M-Z Interferometer with  $|1, 1\rangle$  input and joint detection output.

#### D. 非线性分束器下的非线性干涉仪

如图 (3b), 我们定义” N-光子 “集体产生和湮灭算符:

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{N!}}(a_j)^N$$

$$c_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N!}}(a_j^\dagger)^N$$

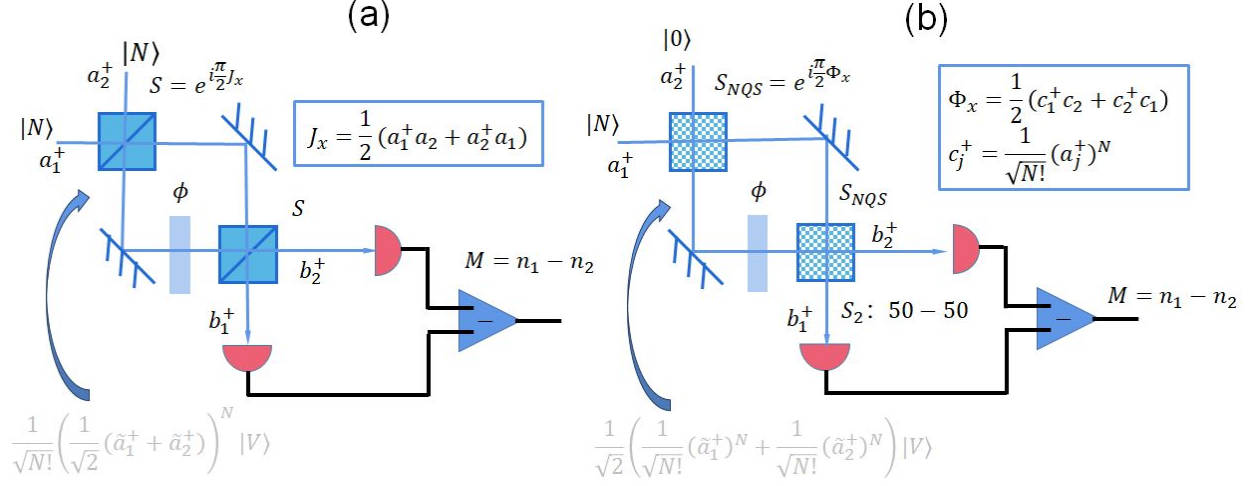


图 3. (a) M-Z Interferometer with “twin-Fock state” input  $|N, N\rangle$  input – the phase information cannot be easily extracted at the output. (b) A future nonlinear interferometer where “quantum nonlinear splitter” mixes  $|N, 0\rangle$  with  $|0, N\rangle$  states. a “NOON” state  $|N, 0\rangle + |0, N\rangle$  is applied to sense phase shift  $\phi$ , before another “quantum nonlinear splitter” remix the quantum states for the differential photo-current readout.

如果有一种非线性分束器，可以对  $c_j, c_j^\dagger$  进行分束操作，那么，从 Fock 态  $|\psi\rangle_{\text{in}} = c_1^\dagger |V\rangle$ ，就可以在干涉仪内部形成如式 (8) 的 NOON 态。由于  $N$ -光子相移是单光子的  $N$ -倍，出射端直接光强差分测量即可实现海森堡极限的相位分辨。

### III. 量子成像

#### A. 基于 NOON 态的超分辨照明

如图 (4)

照明光：

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{(b_1^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} + \frac{(b_2^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} + \frac{(b_3^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} \right) |V\rangle$$

$N$ -光子探测器读数：

$$\begin{aligned} \delta P^{(N)}(x) &= \eta^N \langle E^-(x) \dots E^-(x) E^+(x) E^+(x) \rangle, \\ &= \eta^N (|\varepsilon_1(x)^N + \varepsilon_2(x)^N + \varepsilon_3(x)^N|^2) \end{aligned} \quad (11)$$

总结，非常重要，但是难度太大，NOON 态本身很难实现， $N$ -光子测量也很难做到。

#### B. 量子成像的位移测量

目前人类技术尚难以做到如式 (11) 的  $\lambda/N$  超分辨成像，然而另一方面，我们可以通过操控光场的量子态，抑制光子数涨落，从而提高成像信噪比，进而增强对图像特征参数的测量（拟合）精度。这样的参数包括”吸收“，”相移动“，也包括图像特征的中心位置。本小节讨论后者。

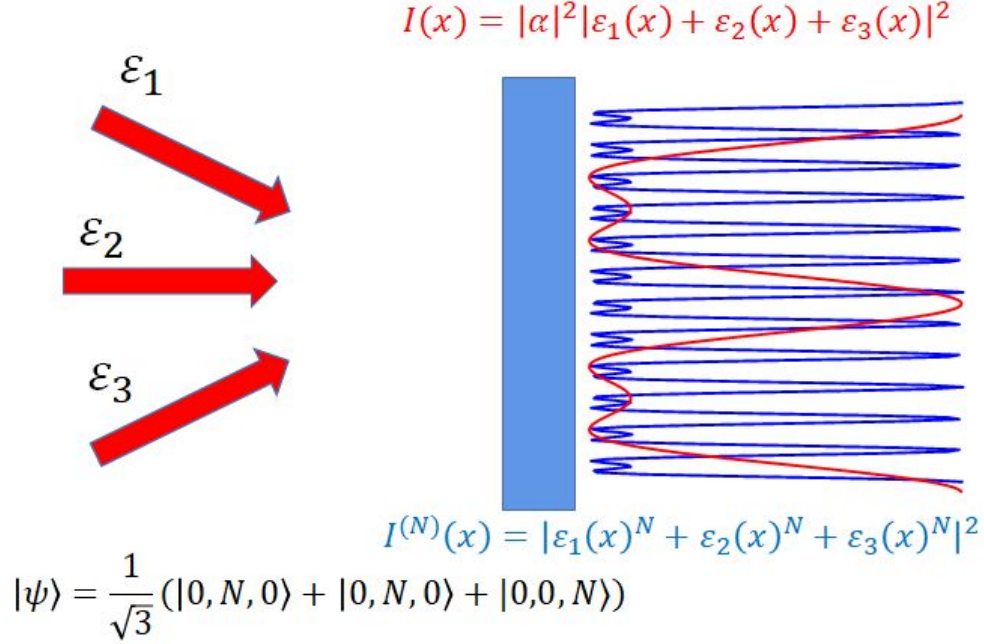


图 4. Quantum image with generalized "NOON" states.

值得一提的是，图像特征中心位置的确定，可以超越衍射极限，也称为“超分辨”成像（2014 年诺贝尔化学奖）。

#### 1. 波前分割

基于分割波前的“分束”探测器  $j = 1, \dots, N$ ，面积  $A_j$ ，入射光模式  $\varepsilon_1$ ，在探测平面波前分割：对于  $(x, y) \in A_j$ ，

$$P_j = 1$$

, 否则

$$P_j = 0$$

,

对于我们关心的光场来说，当然有

$$\sum_j^N P_j = 1$$

令分割波前的光场模式  $j$ :

$$\tilde{\varepsilon}_j = \frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_j} P_j \varepsilon_1$$

其中  $\tilde{\mathcal{N}}_j$  保持光场的归一化： $\varepsilon_0 \int |\tilde{\varepsilon}_j|^2 d^2 r c dt = \hbar \omega / 2$

对于入射光场  $\varepsilon_0$  来说，我们显然有

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}_1} \sum \tilde{\mathcal{N}}_j \tilde{\varepsilon}_j$$



我们可以构造  $N-1$  个“正交反号”光场

$$\mathcal{E}_l = \frac{1}{\mathcal{N}_l} \sum_j (-1)^{n_l} \tilde{\mathcal{N}}_j \tilde{\mathcal{E}}_j$$

使得  $\{\mathcal{E}_l\}, l = 1, \dots, N-1$  正交。

这样，我们就构造了两套正交电场模式： $\{\mathcal{E}_l\}, l = 1, \dots, N-1$  包含待测光场  $\mathcal{E}_1$ ，及  $N-1$  个真空模式。

$\{\tilde{\mathcal{E}}_j\}, j = 1, \dots, N-1$  探测器模式，并且有算符转换关系

$$b_j^\dagger = \sum_k S_{jk} a_k^\dagger$$

这样，我们就把（照明）成像问题转换为已经熟知线性量子光学问题，我们可以分析探测器读数  $n_j = b_j^\dagger b_j$  的噪声。

## 2. 应用：光束中心位置的量子测量

考察如图 (5a) 的光斑中心位置测量。上一小节考虑的波前分割运用到这儿的”四象限“探测器，我们有模式：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_a &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) \\ \tilde{\mathcal{E}}_b &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) \\ \tilde{\mathcal{E}}_c &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) \\ \tilde{\mathcal{E}}_d &= \frac{1}{2}(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) \end{aligned} \quad (12)$$

我们定四象限探测器的中心为  $\mathbf{r} = 0$ ，每个探测器光斑的中心位置为  $\mathbf{r}_{a,b,c,d}$ 。当光斑接近正中时，自然有  $x_{a,b} = -x_{c,d} = x_0$  以及  $y_{a,c} = -y_{b,d} = y_0$ ，此时光斑中心位置的测量值可以表达为：

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{n} ((n_a + n_b)x_0 - (n_c + n_d)x_0), \\ &= \frac{n_{ab;cd}}{n} x_0, \\ y &= \frac{1}{n} ((n_a + n_c)y_0 - (n_b + n_d)y_0), \\ &= \frac{n_{ac;bd}}{n} y_0 \end{aligned} \quad (13)$$

考察输入光子态为

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = D_0(\alpha)|V\rangle$$

即由激光模式下的相干态， $|\alpha|^2 = \bar{n} = QPT/\hbar\omega$ 。z 这里  $P$  是激光数的功率， $T$  是测量时间， $Q$  是四象限探测器的量子效率。由式 (12)，我们知道

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\bar{n}_{ab;cd}}{\bar{n}} x_0, \\ \bar{y} &= \frac{\bar{n}_{ac;bd}}{\bar{n}} y_0 \end{aligned} \quad (14)$$

注意，对于相干态输入来说， $\Delta n_{ab;cd} = \sqrt{\Delta n_a^2 + \Delta n_b^2 + \Delta n_c^2 + \Delta n_d^2} = \sqrt{\bar{n}}$ ， $\Delta n_{ac;bd}$  同理，因此有

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{x_0}{\sqrt{\bar{n}}}, \\ \Delta y &= \frac{y_0}{\sqrt{\bar{n}}}\end{aligned}\quad (15)$$

注意，获得式 (14)(15) 我们已经假设  $\bar{n}_{ab;cd} \ll \bar{n}$ ，等等。如果想提高式 (15) 的定位精度，可以对  $\mathcal{E}_{1,2,3}$  进行真空压缩，使得入射态为

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = D_0(\alpha)S_1(\xi)S_2(\xi)S_3(\xi)|V\rangle \quad (16)$$

并且调整  $\arg[\xi]/2$  到  $\arg[\alpha]$ ，其他分析和上一讲基本类似，我们会获得量子压缩增强的光斑位置测量：

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{x_0 e^{-|\xi|}}{\sqrt{\bar{n}}}, \\ \Delta y &= \frac{y_0 e^{-|\xi|}}{\sqrt{\bar{n}}}\end{aligned}\quad (17)$$

不同于上节课的引力波干涉测量中光场在干涉仪第一次分束后对反射镜的光压反作用讨论，这儿式 (17) 相当于“分束”后直接测量，因此  $\mathcal{E}_{a,b,c,d}$  光子数散粒噪声的抑制直接反应到测量结果，非常直接方便。这样的量子增强定位测量在生物医学成像，原子力显微镜探针定位等技术中，对弱光照明精密测量这一关键步骤有潜在重要的帮助。

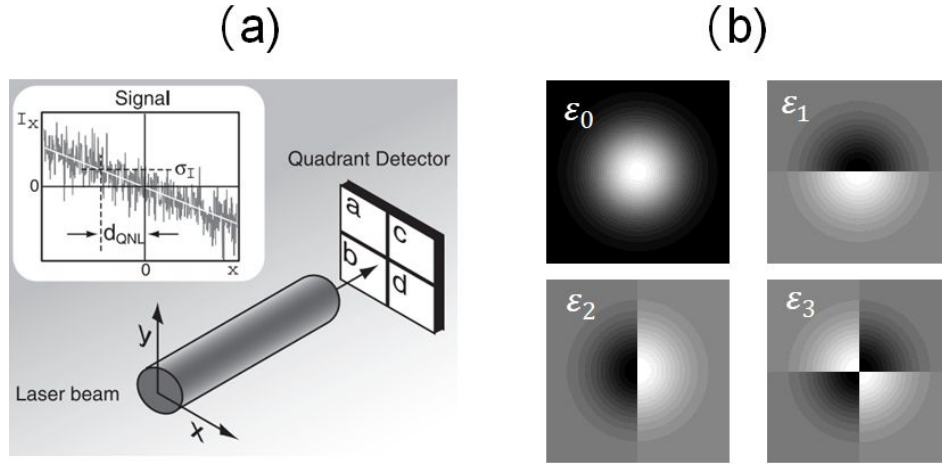


图 5. A quantum laser pointer (a) from Science 301, 941 (2003) (b) The four "flip modes" for the quadrant detector.

#### IV. 线性量子光学：复习

##### A. 量子力学方法回顾

态矢量，观测量，能量表象，演化描景，直积态和纠缠态，密度矩阵，求迹和部分求迹，熵。观测量的期待值，涨落，分布函数，标准差。二能级原子的泡利矩阵，核磁共振。简谐振子的升降算符，位

移算符，相干态。

## B. 电磁场的量子化

Maxwell 方程的正则量子化，量子光场的 Fock 态，热态，相干态。电磁算符和磁场算符，真空电磁涨落。光场算符的模式变换和分解。光场模式的慢变化振幅近似，高斯光学简介。二能级原子和单模光场的偶极相互作用-含时微扰，旋转波近似下的单光子拉比振荡。

## C. 相干态和激光

“受迫偶极振子”驱动下的光场，相干态的 Wigner 函数含时演化特征。激光和相干态，激光原理简介。

## D. 激光驱动下的二能级原子

二能级原子相干调控的布洛赫球方法，原子钟，量子投影噪声的经典极限。

## E. 光测量和光子统计

光子计数和光强测量，强度关联函数，单模光场的光子统计，场关联函数，稳定光场的相干长度和相干面积。双模光场的 HBT 效应，相干态的相干性，泊松过程，相干态的光子散粒噪声，光子群聚和反群聚。

## F. Fock 态下的线性量子光学

光场的线性光学变换，单光子的线性干涉仪，光子散粒噪声，Hong-Ou-Mandel 效应，复杂光路的输入输出模式关系，条件量子态。

## G. 光场正交分量的内差测量，干涉仪物理

光场量子态的量子层析测量，相干态的相位测不准关系。线性干涉仪的噪声分析和灵敏度分析。压缩态的产生和应用。光损失。

## H. 量子光学前沿

基于线性光学变换和测量的光量子计算，玻色取样，基于 HOM 效应的非线性干涉仪，基于 NOON 态的非线性干涉，量子成像。